TECHE
UDINE

MANOSCRITTI

FONDO PRINCIPALE

Manoscritto n. **P_MSS_1168**

Nel Fondo Principale sono confluiti la maggior parte dei lasciti manoscritti pervenuti alla Biblioteca Civica «Vincenzo Joppi» nel corso del tempo: si tratta perciò di un fondo composito nel quale è possibile trovare manoscritti di argomento liturgico, scientifico, giuridico, botanico e altro.

Collocazione:

Biblioteca Civica "Vincenzo Joppi", Udine
https://www.techeudine.it/fondo-principale
https://www.sbhu.it/

Rampinelli
Elementi
Meccanici
e Statici

1168

Elementi
Meccanici e Statici
Dal
D. P. Ramiro Rampinelli
Bresciano
Monaco Olivetano.

I. [illegible]

III. [illegible]

II. [illegible]

IV. [illegible]

V. [illegible]

Indice de' Capitoli.

I. Del moto dei corpi nel vacuo. pag. 1
III. Del moto de' corpi ne' mezzi resistenti: pag. 46
II. Del moto de' progetti nel vacuo, e delle forze centrali, dalle quali i gravi sono ritte= nuti nelle propria orbita. pag. 67.
IV. Della Statica. pag. 125.
V. De' Pendoli. pag. 168.

Cap. I.

Del moto de' corpi nel vacuo. Definizioni.

1 La quantità della materia di qualunque corpo, che chiameremo massa, è l'aggregato di tutte le particelle minime, che compongono il corpo, prescindendo da' pori, ossia interstizj frapposti.

2. Il volume è quello spazio occupato dalla materia del corpo compresi i frapposti pori.

3 Dal paragone della massa con il volume ne risulta la densità del corpo, la quale è quel rapporto, ch'à la quantità della materia in ciascun corpo al di lui volume. Sia un corpo d'una data, e costante quantità di materia, e sia di volume variabile; quanto più scemerà il volume, rimanendo costante la quantità della materia, tanto più crescerà la densità, di modo che, se ci imaginaremo, che nel corpo si tolgano tutti i pori, allora essa avrà la massima densità, ed il minimo volume. è dunq. la densità del corpo nella ragione composta della diretta delle masse, e della inversa de' volumi.

4 La rarità all'opposto consiste nella ragione, che à il volume alla massa, e però la rarità de' corpi è nella ragione composta della diretta de' volumi, e dell'inversa delle masse, di modo che quanto minore più sarà la massa rispetto al volume d'un corpo, tanto più sarà maggiore la di lui rarità.

Da queste definizioni ne siegue, che paragonando assieme due corpi, se chiameremo M, m le loro masse, V, u i loro volumi, D, d le densità, ed R, r le rarità, sarà primo $M, m : DV, du$; imperciocchè per la definizione 3.^{a} $D=\frac{M}{V}$, e $d=\frac{m}{u}$, adunque $D : d :: \frac{M}{V} : \frac{m}{u}$, ossia $M : m :: DV : du$. 2.° quindi $Mdu = mDV$, e mutando l'equazione in analogia, $V, u :: Md, mD$, ossia $V, u :: \frac{M}{D} ; \frac{m}{d}$, cioè i volumi nella ragione composta della diretta delle masse, e della inversa delle densità. 3.° ma le densità sono reciprocam.^{te} come le rarità; dunq. i volumi sono nella ragione composta

posta della diretta delle masse, e della diretta delle rarità, e pe:
rò V, u :: MR, mr. 4° turg. M, m :: $\frac{V}{R}$, $\frac{u}{r}$, cioè le masse nella ragione composta della diretta de' volumi, e della inversa delle rarità.

5° Il moto è la successiva applicazione di un corpo a diverse parti di uno spazio infinito immobile, ossia il successivo cambiamento di questo corpo da luogo a luogo rispetto allo spazio immobile.

6ª La velocità d'un corpo in moto sempre si riferisce al tempo, di modo che ha maggiore velocità quel corpo, che in minor tempo descrive il medesimo spazio, oppure nel medesimo tempo descrive maggior spazio, e sono eguali le velocità di que' corpi, che descrivono spazi eguali in tempi eguali.

7ª Velocità equabile è quella, che nè cresce, nè cala, ma sempre si mantiene la stessa.

8ª quindi quel moto, che si fa con tale velocità, si chiama equabile, uniforme; e quello, che si fa con velocità che cresce, si chiama accelerato, e ritardato quello, che si fa con velocità che va scemando.

9ª moto uniformemente accelerato è quello, la di cui velocità in tempi eguali minimi egualmente cresce; moto uniformemente ritardato quello, la di cui velocità in tempi eguali minimi egualmente scema.

10ª Ciò che spinge il corpo al moto si chiama forza motrice; quindi la gravità ancora è forza motrice perchè spinge i corpi tutti a cadere verso il centro de' gravi. Si divide la forza in viva, e morta, oppure semplicemente in forza la prima, e sollecitazione la seconda.

11ª Forza morta è quella, la quale non produce effetto sensibile e da cui non ne nasce effetto alcuno nel corpo; tale sarebbe la gravità di un corpo, che posasse sopra un piano, oppure di due gravi posti in equilibrio nella bilancia; come pure

un solo

un solo impulso della gravità di un corpo libero, imperciocchè il corpo non acquista moto, se non dopo tali infiniti impulsi incessantem.te replicati. Per maggiore chiarezza di ciò si consideri un grave, il quale dallo stato di quiete si lasci natural.te cadere, ed in tempo finito acquisti un grado determinato di velocità. Essendo che la gravità costantem.te opera, ed il mobile dalla quiete alla velocità, che acquista passa per gradi, egli è necessario, che il primo impulso della gravità produca un grado di velocità infinitesimo, dal che ne siegue, che se la gravità non replicasse gli impulsi non produrrebbe effetto sensibile.

12.a La forza viva è quella ch'è congiunta con il moto, ed è l'aggregato di tutte le azioni della forza morta, che successivam.te sollecita; imperciocchè l'empito comunicato al corpo, quantunque sia minimo, però si conserva nel corpo ed infiniti empiti tali costituiscono la forza viva.

13.a La direzione di qualunque forza motrice, è retta linea, per la quale la forza opera nel corpo.

14.a Quelle forze, e que' moti, la direzione de' quali si uniscono final.te in un punto, oppure sono parallele, ma indirizzate verso la medesima parte, si chiamano forze e moti cospiranti.

15.a Contrarie poi si chiamano quelle forze, o moti, le direzioni de' quali s'uniscono, prodotte se fa di bisogno, in un punto, o sono parallele, ma indirizzate, ed operanti in parti opposte.

16 Corpi solidi, o consistenti sono quelli, gli elementi dei quali ossia particelle componenti sono in guisa tale tra di loro unite che non può essere sensibilm.te mossa una di queste, che non sia mosso tutto il corpo.

17.a Fluidi sono que' corpi, le particelle dei quali non sono in tal guisa unite, che non si possa movere una, o più senza movere tutto il corpo.

18.a Per vacuo s'intende quello spazio qualunque egli si sia in

cui nessun ajuto, o nocumento è apportato al moto de' corpi, che per esso si muovono spinti dalla sola forza motrice.

19.ª Se le sollecitazioni, che spingono un corpo a muoversi per una retta, o curva, avranno le loro direzioni tali, che concorrano e s'uniscano in un punto, si chiameranno sollecitazioni centrali, oppure centripete, e quel punto si chiamerà centro delle sollecitazioni.

20.ª Scala delle sollecitazioni centrali si chiama quella linea retta o curva la quale sendo riferita a qualche asse, che passi per lo centro delle sollecitazioni, à le ordinate perpendicolari al medesimo asse tali, che esprimono le sollecitazioni, dalle quali è spinto il corpo in que' punti dell'asse per le quali sono condotte, se il corpo si move nell'asse. Se poi il corpo non si move nell'asse, ma in una retta all'asse inclinata, o in una curva, esse ordinate esprimono le sollecitazioni del corpo in que' punti, che sono tanto lontani dal centro delle sollecitazioni, quanto sono lontani i punti dell'asse per li quali esse ordinate passano.

Fig. 1 Cada un corpo per la verticale AD, che passa per lo centro delle sollecitazioni in D, e da qualunque punto di essa, come E oppure H si conducano le normali EB, HP eguali alle sollecitazioni del corpo nei medesimi punti E H, la linea CBP o retta, o curva, che termina le suddette normali, si chiama la scala delle sollecitazioni del corpo, che nella verticale AD si muove. Così pure, movendosi il corpo nella inclinata AFK, o nella curva AMN, e condotti al centro D gli archi NFE, V SH, se CB, HP esprimeranno le corrispondenti sollecitazioni centrali de' punti F, K, o de' punti N, V (il che s'intenda di qualunque altro punto) la curva CBP sarà la scala delle sollecitazioni centrali del corpo nella inclinata AK, o nella curva AMN.

5

21.ª Scala delle velocità è quella curva riferita all'asse, che passa per lo centro delle sollecitazioni, o ad una parallela, avendo essa curva le ordinate tali, che esprimano le velocità del grave ne' punti corrispondenti di quella linea o retta, o curva, su cui si muove il grave, prese essi punti nella stessa maniera, come si è fatto nella curva delle sollecitazioni. Tale per esempio sarebbe la curva XqP.

Scolio.

In tre maniere può operare la sollecitazione nel produrre il moto in un corpo. La 1.ª maniera è quando la sollecitazione è continuam.te applicata al corpo, e lo sollecita in ogni momento di tempo impiegando tutta la propria energia; tale sarebbe la gravità de' corpi liberam.te cadenti nel vuoto. La 2.da è quando dopo avere la sollecitazione prodotto il moto, al corpo più non gli è applicata, nè l'accompagna, ma egli seguita a muoversi in virtù della prima spinta con quella velocità, che gli à potuto comunicar la sollecitazione impellente, e con quella che di mano in mano gli lascian avere gl'impedim.ti, o forze contrarie. Questa si osserva nel moto di que' corpi, che si muovono in virtù d'un qualche urto ricevuto, come avviene in un grave spinto all'insu contro la naturale direzione della gravità. La 3.ª finalm.te è quando la sollecitazione non solo comunica il moto al corpo, ma ancora l'accompagna in modo però, che non tutta sempre agisce, nè della stessa maniera nel corpo nell'accompagnarlo. Un esempio di questa sarebbe il moto d'una nave spinta dal vento, la forza del quale tutta opera nella nave nel principio del moto, ma non così nel progresso, imperciocchè ora l'azione del vento in proporzione della velocità acquistata dalla nave, di modo che se la nave acquistasse velocità eguale a quella del vento, ancorchè impedisse il di lui moto, l'azione del vento sarebbe nulla.

Assiomi

1.º Qualunq. corpo non impedito sempre si mantiene in quello stato in cui si ritrova, quando da altri corpi non venga necessitato

a mutare

ammutare stato; cioè, s'egli si ritrova in quiete, sempre sarà in quiete, finchè un altro corpo lo spinga al moto; e se si muove sempre si muoverà della stessa maniera, finchè un altro corpo lo impedisca.

2.° Qualunq. moto per se è sempre per linea retta, e nella medesima direzione, con cui à principiato; imperciocchè non v'è ragione, per cui debba deviare, se qualche forza nõ l'obbliga.

3.° Ad ogni azione è sempre eguale, e contraria la reazione; di modochè un corpo quanto di forza ad un altro comunica, altrettanta ne perde della propria; e in questa legge consiste la forza d'inerzia.

4.a La causa adequata è sempre proporzionale al suo effetto, nè può produrre effetto maggior di se.

Teorema Primo.

Qualunq. velocità, ancora non uniforme, trascorre uniformem.te uno spazio infinitam.te picciolo. e qualunq. sollecitazione agisce uniformem.te per un tempo infinitam.te picciolo.

Sia la velocità variabile $= u$, e trascorra uno spazio infinitesimo $= ds$. Dunq. se nel principio di questo spazio la velocità $= u$; nel fine sarà $= u + du$, oppure $u - du$ secondo che essa cresce, o decresce, perchè in uno spazio infinitesimo l'aum.to o decrem.to della velocità non può essere, che infinitesimo. Ma $u \pm du$ si può assumere come $= u$; dunq. lo spazio infinitesimo ds è trascorso uniformem.te Così pure sia la sollecitazione $= f$, la quale in tempo finito $= t$ produca effetto finito $= A$. Proseguisca ad operare per un altro tempo, ma infinitesimo $= dt$, l'effetto sarà $= A + dA$, perchè ad aumento di tempo infinitesimo nõ corrisponde, se non aumento di effetto infinitesimo [illegible] tiram.te a sollecitazione finita. Ma $A + dA$ si può assumere come $= A$ cioè costante, dunq. la sollecitazione agisse uniformemente in tempo infinitesimo.

Teorema

Teorema 2°.

Qualunq. sollecitazione, che opera uniformem.te, molt: tiplicata nel tempo, in cui opera, è proporzionale alla quantità del moto.

Imperciocchè se la sollecitazione opera, come supponiamo, continuam.te della stessa maniera, la quantità dell'effetto cor: risponderà al tempo in cui essa sollecitazione opera. Ma la quantità dell'effetto corrisponde ancora alla sua causa, di modo che in pari tempo maggior effetto si produce da causa maggiore in proporzione all'energia della causa; dunq. l'effetto, ch'è la quantità del moto, è nella ragione composta della sollecitazione e del tempo.

Corollario.

E perchè per un tempo infinitesimo qualunq. sollecitazione opera uniformem.te (Teor.a p.o), se chiameremo f la sollecitazione qualunq. ella si sia, dt il tempo infinitesimo, m la massa del corpo, du l'elemento della velocità acquistato in tale infinitesimo tempo, sarà sempre $f\,dt = m\,du$.

Teorema Terzo.

Se un corpo trascorrerà uno spazio infinitesimo in tem: po infinitesimo, la di lui velocità sarà nella ragione composta della diretta dello spazio, e dell'inversa del tempo.

Lo spazio minimo è trascorso (Teo.a p.o) da velocità uniforme; dunq. posto costante il tempo, quanto più grande sarà lo spazio trascorso, tanto maggiore sarà la velocità, e posto costan: te lo spazio, quanto maggiore sarà il tempo tanto minore sarà la velocità; dunq. sarà $u = \frac{ds}{dt}$.

Corol. p.o

Quindi lo spazio è nella ragione composta della velocità, e del tempo; ed il tempo è nella composta della diretta dello spazio, e della inversa della velocità.

Corol. 2do

Supposta costante la sollecitazione, è integrabile la formula del

del Coroll. del Teor. 2.° cioè $f\,dt = m\,du$, il di cui integrale è $ft = mu$; ma $u = \frac{ds}{dt}$, dunq. $ft = \frac{m\,ds}{dt}$, cioè $ft\,dt = m\,ds$, e di nuovo integrando $ftt = 2ms$, cioè la sollecitazione costante moltiplicata nel quadrato del tempo eguale al doppio spazio percorso nel medesimo tempo. Ma (Teor. pr.°) qualunq. sollecitazione si può assumere per costante in tempo infinitesimo; dunq. in tempo infinitesimo, qualunq. siasi la sollecitazione o costante o variabile generalm.te sarà $f\,dt^2 = 2m\,ds$.

Coroll. 3.°

Da questo Teorema, e dal Coroll. del Teor. 2.° si deduce un principio fondamentale di statica, cioè, che i pesi nella bilancia sono in equilibrio, qdo anno tra di loro la ragione inversa della distanza dal punto di sospensione. Imperciochè per esso Coroll. abbiamo $f\,dt = m\,du$, e chiamato M il peso, o massa d'altro corpo, dV la sua velocità, F la sollecitazione, dT il tempo sarà pure $F\,dT = M\,dV$, onde $f\,dt, F\,dT :: m\,du, M\,dV$.

Fig.a 2.a Ciò posto sia la bilancia (Fig.a 2.a) mPM colli annessi pesi o masse m, M, le di cui respettive sollecitazioni nella bilancia siano f, F. Movendosi essa per un tempo infinitesimo attorno il punto fisso, avremo $u = \frac{ds}{dt}$ rispetto alla massa m, ed $V = \frac{dS}{dT}$ rispetto alla massa M chiamando S lo spazio che da essa si descrive; ma perchè nella bilancia i tempi sono eguali, dunq $u, V :: ds, dS$, cioè le velocità come gli spazi, vale a dire come gli archi descritti attorno al centro P, ossia come le distanze mP, MP, che sono proporzionali ad essi archi. Dunq nella formula $f\,dt, F\,dT :: m\,du, M\,dV$ cancellati i tempi per essere uguali e sostituita le distanze in luogo delle velocità avremo $f, F :: m \times Pm, M \times PM$. Sarà dunq. $f = F$, cioè le sollecitazioni in equilibrio, qdo sia $m \times Pm = M \times PM$, vale a dire $m, M :: PM, Pm$.

Questo discorso è fallace, [illegible]

Teore. 4.°

Il momento di qualunq. velocità è nella ragione composta della

[illegible] di sospensione [illegible]

della metà della sollecitazione, e dell'elem.to dello spazio, e della inversa della massa del corpo mosso, intendendo per momento della velocità il prodotto della velocità stessa nel suo elemento.

Per lo Teore.a 2.o abbiamo $f\,dt = m\,du$, e per lo 3.o $dt = \frac{ds}{u}$, dunq. $\frac{f\,ds}{m} = u\,du$.

Coroll.o

Si muova il corpo nella curva AMN (Fig.a 3.a), e sia RB scala delle forze centrali, AFJ scala delle velocità, TF perpendicolare ad essa scala, sarà la subnormale ET, qualunq. siasi il punto F, sempre eguale alla corrispondente forza centrale EB. Denominando $BE = f$, $Ee = ds = Fa$, $EF = u$, $aj = du$, per la similitudine dei triangoli FET, jaF, sarà $ET = \frac{u\,du}{ds}$: ma $u\,du = \frac{f\,ds}{m}$; dunq. $ET = \frac{f\,ds}{m\,ds}$, cioè $ET = f$, facendo m figura di unità per essere costante. Fig.a 3.a

Definizione 22.a

Sollecitazione tangenziale è quella, che deriva dalla sollecitazione centrale e da cui il corpo è spinto per la tangente della curva.

Defin.e 23.a

Sollecitazione perpendicolare è quella, che deriva dalla centrale ed à la direzione sempre perpendicolare alla curva.

Def.e 24.a

Scala delle sollecitazioni tangenziali è quella curva, la quale è riferita all'asse, che passa per lo centro delle sollecitazioni, e le ordinate della quale esprimono le sollecitazioni tangenziali in ogni punto tanto lontano dal centro delle sollecitazioni, quanto è lontano il punto dell'asse per cui passa l'ordinata corrispondente.

Ma tutto ciò meglio s'intenderà premettendo prima il seguente Lemma. Fig.a 4.a

Sia un corpo in A spinto da due forze, che nè sieno nè cospiranti, nè direttam.te contrarie, le quali vengano espresse dalle linee AB, AC, nelle direzioni delle stesse AB, AC, dico, ch'egli anderà per la diagonale AD, e che nel tempo in cui giugne da A in B colla forza AB, oppure da A in C colla forza AC, giugnerà da A in D colla forza, che si compone delle due AB, AC, che verrà espressa dalla diagonale AD.

In qualunq. dato tempo, in cui il corpo A colla forza AC movendosi da A in M, intendasi esso colla forza AB mosso

parallelo

parallelo a se stesso il lato AC verso B a guisa d'un regolo, che seco porti il corpo A. Egli è manifesto, che il corpo A dopo questo tempo non sarà nella retta AC, perchè il regolo l'avrà trasportato verso BD; nè meno sarà egli nella retta AB, perchè la forza AC l'avrà spinto lungo il regolo verso CD; sarà dunque in un punto tramezzo v.g. N. Ma AM è lo spazio ch'avrebbe corso nel dato tempo colla sola forza AC, ed MN parallela ad AB è lo spazio che gli ha fatto scorrere il regolo colla forza AB nel medesimo tempo. Dunq. sarà AM, MN :: AC, AB, ossia CD; il che verificandosi d'ogni simil punto, converrà, che il corpo A vada per la diagonale da A in D nel medesimo tempo. Ma ella è la stessa cosa che il corpo sia portato dal regolo, o che sia spinto da una forza espressa per AB; dunq. le due forze AC, AB spingeranno il grave per la diagonale da A in D. E perchè gli effetti sono proporzionali alle cause, se lo spazio AC corrisponde alla forza AC, oppure lo spazio AB alla forza AB, lo spazio AD corrisponderà alla forza espressa per AD, che si compone dalle due AC, AB.

Coroll.°

Facilm.te si vede che se dalle due forze AC, AB si compone la forza AD, essa pure si risolve nelle due AC, AB; onde ciò posto.

Fig. p.a Sia nella retta NS (Fig.a p.a), che congiunge il centro delle sollecitazioni col punto N in cui trovasi il corpo, che si move sulla curva AMN, sia dica NO = EB, cioè esprima NO la sollecitazione centrale nel punto N, questa si risolve nelle due NI coll. la direzione per la tangente, ed OI perpendicolare a essa tangente. La p.a NI si chiama sollecitazione tangenziale, la 2.da OI perpendicolare. Se dunq. su le ordinate EB, HP, si prenderanno parti EL, HT eguali alle sollecitazioni tangenziali che corrispondenti punti N, V etc., della curva AMN, sarà y LT la scala delle sollecitazioni tangenziali.

Trove:

Teorema 5.°

Se un corpo si moverà nella verticale AD, e nella curva AMN, o in una inclinata e ne' punti E, N egualm.te Lontani dal centro delle sollecitazioni sia spinto dalla medesima sollecitazione centrale: Dico che il prodotto di essa sollecitazione centrale moltiplicata nell'elem.to della verticale sarà eguale al prodotto della sollecitazione tangenziale moltiplicata nell'elem.to della curva, o dell'inclinata. Fig.a 3.a

La sollecitazione centrale de' punti E, N venga espressa dalla retta NS, indi condotta la tangente NI, a cui sia perpendicolare SI, sarà NI la sollecitazione tangenziale. Si tiri l'arco ePn infinitam.te prossimo all'arco EN, e sia Ee = ds, Nn = dx, la forza centrale = f. I triangoli NSI, NPn sono simili, perchè gli angoli SIN, NPn sono retti, e l'angolo PNn comune; dunq. Nn, (dx) NP, (ds) :: NS, (f) NI, e però $NI = \frac{f ds}{dx}$, e moltiplicando per l'elemento della curva dx, sarà fds il prodotto della sollecitazione tangenziale nell'elemento della curva appunto lo stesso, che il prodotto della sollecitazione centrale nell'elemento della verticale.

Problema 3.°

Determinare nel vuoto le leggi del moto di un corpo, il quale si muova in una retta linea che passi per lo centro delle sollecitazioni. Fig.a 4.a

Sia AG la retta linea, in cui dal punto A si move il corpo, G il centro delle sollecitazioni, la scala delle quali sia aDF, sia lo spazio AB = s, la velocità del corpo acquistata in B = u la massa = m, la sollecitazione = f. Per lo Teor.a 4.° si ha $\frac{f ds}{m} = u du$; ed integrando $\int \frac{f ds}{m} = \frac{uu}{2}$, ossia $u = \sqrt{2\int f ds}$, sommessa la costante m, che fa figura d'unità. Costruita per tanto questa curva, essa sarà la scala delle velocità, in cui il quadrato di ciascuna ordinata, come BH, sarà eguale alla doppia area aABD compresa dalla retta AB, e dalla scala delle forze.

Il 3.° Teorema ci somministra la formula $dt = \frac{ds}{u}$, chiamato dt l'elem.to del tempo, e però collocato in luogo di u il suo valore qui sopra ritrovato, cioè $\sqrt{2\int f ds}$, avremo $dt = \frac{ds}{\sqrt{2\int f ds}}$, la qual

qual curva costrutta sarà la scala dei tempi.

Coroll.°

Se il mobile con una data velocità sarà spinto con direzione opposta rispetto al centro delle sollecitazioni, per esempio da B verso A, allora la sollecitazione sarà contraria alla direzione del mobile, e però negativa, onde chiamato lo spazio da B verso A = Z, avremo $-fdz = udu$ ~~+ fdz = udu~~, e $uu = S - 2fdz$, ossia $u = \sqrt{S - 2fdz}$. Così pure per la formula del tempo $dt = \frac{dz}{\sqrt{S - 2fdz}}$

Ipotesi p.ª

Per fare uso di queste equazioni, o formule generali, supponiamo l'ipotesi del Galileo della gravità costante. In questo caso la sollecitazione (f) è costante, e la scala d'esse sollecitazioni diviene una ~~des~~ retta parallela ad AG (fig.ª 5ª) ed il centro delle sollecitazioni è il comun centro de' gravi. Presa dunq. l'equazione $u = \sqrt{2Sfds}$, il secondo membro è attualm.te integrale, ed è $u = \sqrt{2fs}$, ommessa la costante, supposto che il moto principj dalla quiete. Ma $u = \sqrt{2fs}$ è equazione alla parabola appolloniana, il di cui parametro $= 2f$; dunq. in questa Ipotesi la scala delle velocità è la parabola apolloniana, e le velocità in ogni punto sono tra di loro nella ragione dimidiata dei spazj percorsi.

Rispetto al tempo abbiamo l'equazione $dt = \frac{ds}{\sqrt{2Sfds}}$, e facendo (perchè f è costante) attualm.te l'integrazione indicata, sarà $dt = \frac{ds}{\sqrt{2fs}}$ e di nuovo integrando $t = \sqrt{\frac{2s}{f}}$, equazione alla parabola apolloniana col parametro $= \frac{2}{f}$, supplendo l'unità alla legge degli omogenei. Sichè la scala de' tempi sarà pure la parabola apolloniana, ed essi tempi in ogni punto saranno tra di loro nella ragione dimidiata de' spazj percorsi

Coroll.° p.°

Perchè le velocità ancora sono nella medesima ragione i tempi saranno sempre proporzionali alle velocità, ed in conseguenza in questa Ipotesi il moto de' gravi è uniformem.te accellerato. Ciò si scopre servendosi ancora della formula

fdt

$f\,dt = m\,du$ (coroll.º Teor.ª 2º); imperciocchè integrando, $ft = mu$, ossia $t = \frac{mu}{f}$, cioè il tempo proporzionale alla velocità

Coroll.º 2º

È $t = \frac{mu}{f}$, è ancora $t = \frac{muu}{fu}$, ma $uu = 2fs$, dunque sostituendo sarà $t = \frac{2ms}{u}$, cioè il tempo in cui si trascorre qualunq. spazio, proporzional al doppio spazio medesimo diviso per la velocità acquistata.

Coroll.º 3º

Poichè gli spazj trascorsi sono come i quadrati de' tempi, ne viene, che se dalla quiete un grave descrive in un dato tempo un dato spazio, in tempo doppio descriverà spazio quadruplo, in tempo triplo spazio noncuplo, cioè crescendo i tempi nella serie naturale de' numeri, gli spazi cresceranno nella serie de' quadrati d'essi numeri.

Coroll.º 4º

Sicchè il grave, che in dato tempo descrive un dato spazio, proseguendo egli naturalm.te il moto, nel 2do tempo eguale al primo descriverà spazio triplo del primo, nel 3º tempo spazio quintuplo, nel 4º tempo spazio settuplo, e così di mano in mano 2do la serie de' numeri dispari.

Coroll.º 5º

Sia liberam.te caduto dalla quiete un corpo per uno spazio $= s$, avremo $t = \sqrt{\frac{2s}{f}}$ ed $u = \sqrt{2fs}$. Ora supponiamo, che il medesimo corpo per uno spazio $= S$ nel tempo $= T'$, ma con questa velocità ultimam.te acquistata, ed assunta come costante, cioè di moto uniforme; questa la formula del Teor.ª 3º è $dT = \frac{dS}{u}$, oppure sostituendo il valore della velocità dato pel primo spazio è $dT' = \frac{dS}{\sqrt{2fs}}$, sarà essa integrabile per la supposizione di u, ossia $\sqrt{2fs}$ costante, e però $T' = \frac{S}{\sqrt{2fs}}$, ma ne' moti accellerati è $t = \sqrt{\frac{2s}{f}}$, dunq. $T' : t :: \frac{S}{\sqrt{2fs}} : \sqrt{\frac{2s}{f}}$; sicchè se i tempi saranno eguali, sarà $S = 2s$; cioè il grave dopo avere trascorso un dato spazio, se proseguirà il moto colla velocità ulti

mamente

mand.te acquistata, ma presa costante, trascorrerà doppio spazio del primo in egual tempo.

Scolio.

Fino ad ora non abbiamo aggiunta mai la costante nelle integrazioni, perchè sarebbe stata superflua, stantechè nel principio dello spazio, ossia del moto la velocità era nulla; ma se ciò non fosse, non deve ommettersi essa costante. Sia per un esempio la velocità $= a$ di un grave nel punto A, da cui principia a moversi, e si cerchino le leggi del moto d'esso grave, che liberam.te cada nella retta AC colla data velocità

Fig.ª 6.ª iniziale $= a$. Dunq. presa la formula (Prob. 1º) $u = \sqrt{2\int f ds}$, ed integrando sarà $uu = 2fs + bb$, aggiungendo la costante bb, che in tal guisa si determina qdo lo spazio è nullo in A la velocità è $= a$, onde cancellato il termine $2fs$, perchè $s = 0$ in A, e sostituito $\pm a$ in luogo di uu, perchè allora $u = a$, sarà $bb = aa$, e però l'integrale compito è $uu = 2fs + aa$. Fig.ª 6.ª Descritta pertanto la Parabola BHD col vertice B discosto dal punto A quant'è la quantità $\frac{aa}{2f}$, all'asse BC, e col parametro $= 2f$, le ordinate MN esprimeranno le velocità dei corrispondenti punti nell'asse.

La stessa addizione della costante si deve osservare nei moti ritardati; e pertanto sia (Fig.ª 7.ª dal punto B spinto verticalm.te in alto un corpo con quella velocità, che avrebbe acquistata cadendo da A, e sia AB $= a$, e si cerchino le leggi del moto di questo corpo. In questo caso dalla gravità del corpo che continuam.te opera, ma in senso contrario per essere opposta all'atto comunicato, a poco a poco viene esso atto ad essere distrutto. quindi è che la sollecitazione della gravità è negativa, e però chiamato lo spazio da B verso C $= z$, la sollecitazione della gravità $= f$, avremo (Prob. 1º coroll. 1º) $u = \sqrt{S - 2\int f dz}$, ed integrando $uu + bb = -2fz$ giungendovi la costante bb. Ora per determinare il valore d'essa costante, si osservi, che quando lo spazio è nullo nel

punto

punto B, la velocità è data, cioè qlla, che avrebbe acquistata ca:
dendo da A in B, cioè $= \sqrt{2af}$; dunq. cancellato il termine
$-2fz$, per essere $= 0$, rimane $bb = -uu$, cioè $bb = -2af$,
e però l'equazione conseguita si trova essere $-2fz = uu - 2af$
luogo alla Parabola apolloniana ADI col parametro $= 2f$, le
di cui ordinate CD rappresenteranno le velocità de' respettivi
punti C, ed il grave giugnerà sino nel punto A, e nulla più.
Ma la stessa parabola è ancò la scala delle velocità nel moto na:
turale de' gravi all'ingiù; dunq. da ciò chiaram.te si vede, che
se un grave, dopo essere caduto per un dato spazio, si move:
rà all'insù colla velocità ultimam.te acquistata, egli des:
criverà di moto ritardato il medesimo spazio descritto ca:
dendo nè più nè meno, e ne' medesimi punti avrà la medesima velocità.
Rispetto ai tempi presa la formula (Teor. 3°) $dt = \frac{dz}{u}$, e sos:
tituito il valore di u qui sopra ritrovato, sarà $dt = \frac{dz}{\sqrt{2af - 2fz}}$,
ed integrando, $t = -\frac{\sqrt{2af - 2fz}}{f} + b$; ma quando $t = 0$ nel principio
del moto, allora $z = 0$ e però $b = \frac{\sqrt{2af}}{f}$, onde l'integrale
compito sarà $t = -\frac{\sqrt{2af - 2fz}}{f} + \frac{\sqrt{2af}}{f}$ equazione alla para:
bola apolloniana. Pertanto descritta col parametro $= \frac{2}{f}$, Fig.a 8.a
all'asse $AB = a$ col vertice A la parabola ADI, e presa
una qualunq. BC, o $IH = z$ (fatta IM parallela ad AB)
il tempo corrispondente allo spazio BC sarà HD, ed allo
spazio BA sarà MA. e perchè la parabola del medesimo
parametro è ancora la scala de' tempi nella caduta, aper:
tam.te si vede, che dal punto B al punto A giugnerà il gra:
ve di moto ritardato in tempo eguale a quello del moto
accellerato. Ma quanto cresce il tempo HD, tanto cala l'
ordinata CD, e questa è proporzionale alla velocità; dunq.
il moto è uniformem.te ritardato.

Ipotesi 2.a

Facciamo l'Ipotesi, che le sollecitazioni sieno proporzionali alle
distanze dal centro. Parta il corpo dalla quiete in A verso Fig.a 9
B (Fig.a 9a), e sia B il centro delle sollecitazioni, la ragione

Tesse

d'esser alle rispettive distanze dal centro in ragione di CA ad AB, onde il triangolo BCA ne sia la scala e chiamato BA = a AC = h BD = x, sarà DQ la sollevazione di qualunque punto D, onde essendo $DQ = \frac{hx}{a}$, sarà la sollevazione, cioè $f = \frac{hx}{a}$. Prendiamo la formula rispetto alla velocità $u = \sqrt{2\int f ds}$ (Coroll. p.º) ed invece di f si sostituisca il suo valore $\frac{hx}{a}$, ed in luogo di ds si ponga $-dx$, perchè crescendo nella caduta lo spazio AD = s cala lo spazio BD. Avremo dunque $u = \sqrt{2\int -\frac{hxdx}{a}}$, e fatta attualmente l'integrazione indicata, $u = \sqrt{-\frac{hxx}{a} + mm}$. Ma quando la velocità è nulla, cioè nel punto A, allora $x = a$; dunque la costante giunta mm deve essere $= ha$, e però l'equazione compiuta $uu = ha - \frac{hxx}{a}$ ossia $\frac{auu}{h} = aa - xx$, equazione all'Ellisse. Se dunque descritta col semiasse coniugato $BS = \sqrt{ah}$, l'Ellisse ATS, essa sarà la scala delle velocità.

Rispetto al tempo presa la formula del Teor.ᵐᵃ 3.º $dt = \frac{ds}{u}$ nel presente caso $ds = -dx$, $u = \sqrt{\frac{aah - hxx}{a}}$, onde sostituiti questi valori, sarà $dt = \frac{-dx\sqrt{a}}{\sqrt{aah - hxx}}$, ed integrando $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$.

$$\int\frac{-dx}{\sqrt{aa-xx}} = \frac{\sqrt{a}}{a\sqrt{h}}\int\frac{-adx}{\sqrt{aa-xx}}$$

quindi descritto col raggio BA = a il circolo AMH, l'integrale di $\frac{-adx}{\sqrt{aa-xx}}$ è l'arco AM; dunque il quarto proporzionale di $a\sqrt{h}$, $\sqrt{a}$, e dell'arco AM sarà la misura del tempo per lo spazio AD.

Coroll.º p.º

Quando lo spazio trascorso sia tutta la retta AB l'arco AM viene ad essere il quadrante AMH; adunque il tempo della caduta in A per tutta la retta AB sarà espresso dalla quarta proporzionale di $a\sqrt{h}$, $\sqrt{a}$, e del quadrante del circolo, ossia dell'angolo retto.

Coroll.º 2.º

Partito il grave dalla quiete nel punto R, e sia BR = b, RT = c, nella medesima legge di sollevazione la scala delle velocità sarà la curva $\frac{buu}{c} = bb - xx$, cioè l'ellisse, il di cui asse trasverso $ro = b = BR$, asse coniugato $bo = \sqrt{bc}$. Dunque presa la formula

La formula q.ª tempo $dt = \frac{ds}{u}$, e sostituiti i valori loro, sarà $dt = \frac{-dx\sqrt{b}}{\sqrt{bb-xx}}$, cioè integrando $t = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}\int\frac{-dx}{\sqrt{bb-xx}} = \frac{\sqrt{b}}{b\sqrt{c}}\int\frac{-b\,dx}{\sqrt{bb-xx}}$ cioè il tempo sarà il quarto proporzionale di $b\sqrt{c}$, $\sqrt{b}$, e dell' arco di circolo col raggio $= b =$ AC; ed il tempo per tutta la retta AB sarà il quarto proporzionale di $b\sqrt{c}$, e del quadrante. Sicchè il tempo per tutta la retta AA (Coroll. 2.º) è $= \frac{\sqrt{a}}{a\sqrt{c}} \times$ quadrante di circolo; il tempo per tutta la AB $= \frac{\sqrt{b}\times}{b\sqrt{c}}$ quadrante di circolo; ma poichè i circoli sono come i raggi, sarà il tempo per tutta la retta AB al tempo per tutta la retta AB, partendo nel p.º caso dalla quiete in A, e dal 2.º dalla quiete in A, come $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}$, a $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$; ma $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$, dunque i tempi eguali, e però da qualunque punto della retta principi il moto, le cadute sino al fine saranno isocrone.

Coroll.º 3.º

Donde si deduce, che generalm.te il moto sarà isocrono, q.do la scala delle sollecitazioni sia il [illegible]lo.

Coroll.º 4.º

Se la ragione della sollecitazione alla distanza dal centro fosse d'egualità cioè fosse CA = AB, ossia $h = a$, allora l'equazione dell'Ellisse passerebbe ad essere equazione al circolo, il di cui centro B, ed il raggio BA $= a$, ed il circolo AMH sarebbe la scala delle velocità, gli Archi AM la misura de' tempi per gli corrispondenti spazj AD; onde gli spazi decorsi sarebbero come i seni versi AD, le velocità, come i seni retti DM, le sollecitazioni come i seni DB del complem[illegible], ed i tempi come gli archi AM.

Coroll.º 5

Si muova il grave con moto ritardato da B verso A; in questo caso la sollecitazione è negativa, e l'elemento dello spazio è positivo, e però avremo $-\frac{hx\,dx}{a} = u\,du$. Sia la velocità prima con cui è spinto il corpo, quella che avrebbe acquistata cadendo da A in B, cioè $= \sqrt{ah}$. Integrando avremo $-\frac{hxx}{a} = uu + mm$. ma nel principio del moto, cioè q.do $x = 0$, allora $u = \sqrt{ah}$, e però $mm = -ah$, onde l'integrale

compito

compiuto sarà $\frac{auu}{h} = -xx+aa$; cioè la medesima Ellisse di sopra sarà la scala delle velocità, e per conseguenza negli stessi punti dello spazio le velocità saranno le medesime, tanto nella salita, quanto nella scesa. Rispetto al tempo avremo $dt=\frac{dx}{u}$ e però sostituendo l'espressione della velocità, $dt=\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{h}\sqrt{aa-xx}}$

ed integrando, $t=\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt{h}}\int\frac{adx}{\sqrt{aa-xx}}$, il qual integrale è l'arco MH, e pertanto il tempo della salita sino al punto A sarà il quadrante, ossia l'angolo retto, come nella scesa.

Fig. 10ª

Ipotesi 3ª

Siano le sollecitazioni reciprocamente proporzionali ai quadrati delle distanze dal centro, e posto AB = a, BD = x, DE = f, sia scala delle sollecitazioni la curva iperbolica quadratica CEH, la di cui equazione $f=\frac{a^3}{xx}$, e parta il corpo da A verso B centro delle sollecitazioni. Prendiamo la formula rispetto alla velocità (Probl. 1°) $u=\sqrt{2\int f ds}$, ed invece di f si sostituisca $\frac{a^3}{xx}$, invece di ds si ponga $-dx$, ed avremo $u=\sqrt{2\int -\frac{a^3 dx}{xx}}$, e fatta attualmente l'integrazione indicata, $u=\sqrt{\frac{a^3}{x}+bb}$, ma quando la velocità è nulla, cioè nel punto A, allora $x=a$, dunque la costante aggiunta b deve essere $= -aa$ e però l'integrale compiuto sarà $uux = a^3 - aax$ scala delle velocità. Per costruire questa curva, sopra il diametro AB si descriva il circolo AIB, e si tiri la tangente AK al punto A, indi preso a piacere qualunque punto D, sia perpendicolarmente condotta la retta DI, e si produca indefinitamente. Pel punto I si tiri BIK, dal punto K si abbassi KF perpendicolare alla retta DI F il punto F sarà nella curva ricercata. Imperocché DI $=\sqrt{ax-xx}$ nel circolo AK $= \frac{a\sqrt{ax-xx}}{x}$ = DF = u e pertanto $uux=a^3-aax$. Per avere la scala de' tempi prendasi la formula del Teor. 3° dt [illegible] e sostituito $-dx$ in luogo di ds ed in luogo di u il suo valore $\sqrt{\frac{a^3-aax}{x}}$ qui sopra ritrovato avremo $dt = \frac{-dx}{a\sqrt{\frac{a-x}{x}}}$, ossia dt

$=\frac{-xdx}{a\sqrt{ax-xx}}$; ma $dt=\frac{-xdx}{\sqrt{ax-xx}}$ equazione alla cicloide;

dunque.

dunque descritta (Fig.ª 11.ª) col vertice A, e col circolo genera:
tore AIB la cicloide AN, il quadrato proporzionale di a
della ordinata MH di qualunque punto M sarà la misura del
tempo per lo spazio AM.

Coroll.° p.°

La curva AFG scala delle velocità (Fig.ª 10.ª) sarà assintoti
ca dalla parte di G, perchè supposto AB lo spazio percorso,
cioè $x = 0$, la velocità si trova essere infinita.

Coroll.° 2.°

Si muova il corpo (Fig.ª 10.ª) da D verso A di moto ritarda:
to con quella velocità, che avrebbe acquistata cadendo da
A in D, e sia $BD = \frac{a}{4}$, $BM = x$ questa velocità sarà
$= \sqrt{3aa}$, la quale si ha sostituendo nell'equazione $uux = a^3 - aax$
in luogo di x la quantità $\frac{1}{4}a$. Presa la sollecitazione
negativa, ma positivo l'elemento dello spazio, avremo
$u = \sqrt{\frac{a^3}{x} + bb}$; ma quando $x = \frac{1}{4}a$, allora $u = \sqrt{3aa}$; sa:
rà dunque la costante $bb = -aa$, e però l'equazione com:
pita $uux = a^3 - aax$, cioè la medesima curva per scala
delle velocità tanto nella scesa, quanto nella salita.
Rispetto al tempo, presa la formula $dt = \frac{dx}{u}$, e sostituito
il valore di u, sarà $dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{a^3}{x} - aa}}$, cioè $dt = \frac{xdx}{a\sqrt{ax - xx}}$
equazione alla cicloide, come nella scesa colla sola di:
versità ne' segni, di modo che in luogo delle ordinate M
H riferite all'asse AB, si prenderanno le ordinate DH riferite alla
retta DS parallela ad BA.

Scolio

Esaminata quanto basta questa ipotesi, resta ora da con
torsi l'impossibilità di alcune altre. Ed in primo luogo
è affatto impossibile l'ipotesi di Baliano, che le velocità
acquistate sieno come gli spazi decorsi; imperocchè chia:
mato lo spazio $= s$, la formola $fds = udu$ in questo caso
sarebbe $fds = \frac{sds}{n}$, cioè $f = \frac{s}{n}$, esponendo $\frac{1}{n}$ la ragione
della velocità agli spazi, ma nel principio del moto lo spa
zio

zio s è nullo, dunque allora $f=0$, e però nulla la gravità, ed in conseguenza il corpo non si moverebbe mai.

Presa la formula del tempo $f\,dt = m\,du$, essa sarebbe $\frac{s\,dt}{n} = m\,ds$, perchè in questa ipotesi $f = \frac{s}{n}$, onde $dt = \frac{mn\,ds}{s}$, ed integrando $t = mnls$, cioè il tempo proporzionale al logaritmo dello spazio della caduta; quando comincia il moto, allora $s=0$, onde $t = mnl0$, cioè il tempo infinito, perchè il logaritmo del zero è infinito, e però si richiederebbe tempo infinito a scorrere spazio nullo, sicchè il grave non si moverebbe mai.

Siano le velocità proporzionali a qualunque potestà degli spazj decorsi, cioè sia $u = \frac{s^m}{n}$. La formula $f\,ds = u\,du$, fatta la sostituzione, sarà $f\,ds = \frac{ms^{2m-1}\,ds}{nn}$, ossia $f = \frac{ms^{2m-1}}{nn}$; ma quando lo spazio è nullo, cioè $s=0$, allora $f=0$, cioè nulla la gravità; dunque immaginaria l'ipotesi.

Inoltre presa la formula del tempo $f\,dt = du$, esostituito in luogo di f il valore qui sopra sarà $\frac{ms^{2m-1}\,dt}{nn} = \frac{ms^{2m-1}}{nV s^{\dots}}$ [illegible] cioè $dt = \frac{n\,ds}{s^m}$, e $t = \frac{ns^{-m+1}}{-m+1}$, ma quando $s=0$ l'omogeneo di comparazione è infinito: dunque il tempo infinito, ipotesi impossibile.

Problema 2.°

Determinare nel vacuo le leggi del moto di un corpo, il quale si mova in una retta, che non passi per lo centro delle sollecitazioni

Sia G il centro delle sollecitazioni (Fig.a 12.a) ACF la retta su cui si move il corpo dalla quiete in A, e descritto da qualunque punto preso a piacere, come E, l'arco DC, esprima DC la sollecitazione nel punto C, onde sia BC la scala d'esse sollecitazioni. Sia $AG = a$, $GD = GC = x$, $GF = b$, e perpendicolare ad AH, e però $CF = \sqrt{xx-bb}$, e sia inoltre lo spazio trascorso $AC = s$. La sollecitazione $DC = f$ in questo caso non opera tutta a produrre il moto, ma si risolve (per lo Lemma) in due proporzionali a GF, ed FC, la prima delle quali tutta si consuma nel premere la linea AF, e solo la seconda accellera il corpo. Dunque facendo l'analogia: x, $\sqrt{xx-bb}$, f al quarto, cioè $f\sqrt{xx-bb}$,

[illegible]

questo sarà la sollecitazione accelerante. Pertanto nella formula del Teor.ª 4º $fds = udu$ sostituita questa in luogo di f, ed in luogo di ds il differenziale di $7C$, ma negativo, perchè crescendo lo spazio AC, esso decresce avremo $\frac{f\sqrt{xx-bb}}{x} \times \frac{-xdx}{\sqrt{xx-bb}} = udu$, cioè $-fdx = udu$, ed integrando $\int -fdx = \frac{uu}{2}$, ossia $u = \sqrt{2\int -fdx}$. Costruita pertanto all'asse AG questa curva, essa sarà la scala delle velocità, in cui il quadrato di ciascuna ordinata, come $D7$, la quale esprime la velocità nel punto C egualm.te lontano dal centro G quanto è il punto D, (sendo per esempio $A7Q$ la curva delle velocità) è eguale alla doppia area $ADCB$.

Presa la formula del Teo.ª 3º $dt = \frac{ds}{u}$, in luogo di ds si sostituisca il differenziale negativo di $C7$, cioè $\frac{-xdx}{\sqrt{xx-bb}}$, ed in luogo di u il suo valore qui sopra ritrovato, cioè $\sqrt{2\int -fdx}$, ed avremo $dt = \frac{-xdx}{\sqrt{xx-bb}\sqrt{2\int -fdx}}$, la qual curva costruita sarà la scala dei tempi.

Coroll.º p.º

Movasi il grave o nella inclinata $A7$, o nella verticale AG, quando la scala delle sollecitazioni sia la medesima, qualunque siasi poi il sistema loro, le velocità ne' punti C, D egualm.te lontani dal centro saranno sempre eguali, perchè la velocità per la verticale (Propos.ª p.ª) è pure eguale alla radice della doppia area $ADCB$.

Coroll.º 2.º

Arrivato il corpo nel punto 7, perchè ivi la sollecitazione acceller. è nulla, ivi terminerà il moto d'essere accellerato, bensì poi per ragione della velocità acquistata proseguirà a muoversi da 7 verso H con moto ritardato, perchè la sollecitazione in questo caso opera in senso contrario. Finalm.te giunto in H, posta $7H = 7A$, avrà perduta tutta la velocità, e però novam.te dalla sollecitazione sarà obbligato a muoversi verso 7 con moto accellerato, indi da 7 verso A con moto ritardato, e così successivam.te in infinito,

se

se nessuna resistenza recasse impedimento.

Ipotesi 1.ª

Sia l'Ipotesi della gravità costante. In questo caso la sollecitazione (f) è costante, e la scala d'essa sarà il rettangolo, ed il loro centro sarà il comun centro de' gravi, e perchè rispetto agli spazj, ne' quali accadono i moti, nella nostra terra la distanza d'esso centro de' gravi si può assumere come infinita, cioè le direzioni parallele, gli archi CD, VZ etc. della fig.ª 1.ª, 2.ª passeranno ad essere linee orizzontali. Sia dunque (fig.ª 3.ª) AIQ l'inclinata, su cui si move il corpo, e la ragione del seno retto al seno del complem.to dell'angolo DAC quella di (b) ad (a); cioè sia AH = a, HQ = b, sarà AQ = $\sqrt{aa+bb}$. Sia di più AD = x, AC = s, indi posto che CG sia = f, cioè esprima la sollecitazione totale della gravità, condotta GZ perpendicolare ad CZ, sarà il triangolo CZG simile al triangolo AHQ, e però CZ = $\frac{af}{\sqrt{aa+bb}}$, la quale esprime la sollecitazione acceleratrice nell'inclinata AZ. Ripresa dunq. l'equazione $u=\sqrt{2\int -f\,dx}$, e sostituito in luogo di (f) il valore di CZ = $\frac{af}{\sqrt{aa+bb}}$ ed in luogo di $-dx$, ch'era l'elem.to dell'abscissa presa dal centro, si sostituisca ds elem.to dello spazio trascorso, ed avremo $u=\sqrt{\frac{2\int af\,ds}{aa+bb}}$, e facendo attualm.te l'integrazione $u=\sqrt{\frac{2afs}{aa+bb}}$, omessa la costante nel supposto che il moto principj dalla quiete in A. Ma $s=\frac{x\sqrt{aa+bb}}{a}$, dunq. $u=\sqrt{2fx}$, equazione alla parabola apolloniana descritta coll'asse AH col parametro = 2f, la quale è la scala delle velocità.

Si avrebbe ancora potuto avere la medesima equazione più speditam.te per mezzo del Teor.ª 5.º sendo il prodotto della sollecitazione acceleratrice nell'elem.to della AC = al prodotto della sollecitazione totale nell'elemento della AD.

Rispetto al tempo prendo la formula del Teor.ª 3.º $dt=\frac{ds}{u}$, ma in questo caso $u=\sqrt{2fx}$, e $ds=\frac{dx\sqrt{aa+bb}}{a}$, dunq. [illegible] le sostituzioni, sarà $dt=\frac{dx\sqrt{aa+bb}}{a\sqrt{2fx}}$, ed integrando, omessa la costante

la costante superflua $t = \sqrt{\frac{2x\sqrt{aa+bb}}{a\sqrt{f}}}$ equazione alla parabola apolloniana. Pertanto descritta all'asse AH la parabola ASH col parametro $= \frac{2aa+2bb}{aaf}$ (supplendo l'unità alle dimensioni) essa sarà la scala de' tempi per l'inclinata AC, di modo che l'ordinata DS sarà il tempo per lo spazio AC, e così degli altri. Corolla.° p.°

Poichè dunq. le ordinate nella parabola dell'asse AH col parametro $= 2f$ esprimono le velocità de' corrispondenti punti nell'inclinata, e però le velocità nella inclinata di diversi punti come per esempio Q, I, etc. saranno tra di loro nella ragione dimidiata delle absisse AH, AR etc., ossia delle proporzionali AQ, AI, cioè nella ragione de' spazj percorsi. E perchè la medesima parabola (prob.a p.°) è ancora scala delle velocità per la verticale AD, saranno perciò eguali le velocità nella inclinata, e nella verticale in que' punti, che sono egualm.te lontani dall'orizonte.

Coroll.° 2.°

Se dal punto D si condurrà DI perpendicolare ad AC, sarà la velocità in D del corpo, che si move per AD, alla velocità in I per AQ, come AD, ad AI. Imperocchè la velocità in D per AD è $= \sqrt{AD}$. la velocità in I per AQ è $= \sqrt{AR}$; ma $\sqrt{AD} : \sqrt{AR} :: AD, AI$. dunq. etc.

Coroll.° 3.°

Se dunq. i tempi per l'inclinata AQ sono tra di loro come le ordinate nella parabola, sarà il tempo per un qualunq. spazio AQ al tempo per un qualunq. altro spazio A , come la radice dell'absissa AH alla radice dell'absissa AX ma AH, AX sono proporzionali ad AQ, AC; dunq. i tempi per l'inclinata proporzionali alle radice dei spazj decorsi. Quindi manifestam.te ne siegue, che il moto per l'inclinata conserverà tutte quelle proprietà, che abbiamo veduto competere al moto per la verticale, cioè sarà uniformem.te accelerato; crescendo i tempi nella serie naturale de' numeri, gli spazi cresceranno nella serie de' quadrati etc. Corol

Coroll.° 4.°

Il tempo per la verticale AR si sa essere (Prob. 5.°) $= \sqrt{\frac{2x}{f}}$, e 'l tempo per l'inclinata AC $= \sqrt{\frac{2x\sqrt{aa+bb}}{a\sqrt{f}}}$; dunq. sarà questo a quello come $\sqrt{\frac{2x}{f}}$ ad $\sqrt{\frac{2x\sqrt{aa+bb}}{a\sqrt{f}}}$, cioè come a ad $\sqrt{aa+bb}$ vale a dire come gli spazj decorsi.

Coroll.° 5.°

Essendo il tempo per AI al tempo per AR :: AI : AR, ed essendo di più il tempo per AR al tempo per AD :: $\sqrt{AR}$: $\sqrt{AD}$, cioè :: AR . AI, sarà ex equo il tempo per AI al tempo per AD :: AI : AI, cioè eguale. Onde qualunque siasi l'angolo dell'inclinazione se da un punto preso ad arbitrio nella verticale si condurrà una perpendicolare all'inclinata, il tempo della caduta per la verticale sino al punto preso sarà eguale al tempo della caduta per l'inclinata sino all'incontro della normale. Descritto pertanto un qualunq. circolo ABCD (Fig.ª 14) in tempi eguali si trascorrerà dal grave, ed il diametro AC, e qualunq. corda AB, AO, AD etc. principiando il moto dal punto A.

Coroll.° 6.°

Sieno le corde BC, OC parallele alle corde AD, AH, il tempo per BC dalla quiete in B è eguale al tempo per AD dalla quiete in A perchè BC, AD sono parallele, ed eguali; lo stesso vale del tempo per OC, ed AH; ma i tempi per AD, AH sono eguali tra di loro, ed eguali ai tempi per AB, AO, e per qualunq. altra corda dal punto A, per lo diametro. Dunq. i tempi per BC, OC etc. saranno eguali tra di loro, ed al tempo per lo diametro, e per qualunq. altra corda dal punto C.

Coroll.° 7.°

Parta il corpo da Q verso A (Fig.ª 13.ª) di moto ritardato colla velocità, che avrebbe acquistata cadendo da A in Q. e sia QC = y; AR = a, RQ = b, In questo caso la ritardatrice, che sappiam essere $= \frac{af}{\sqrt{aa+bb}}$, sarà negativa, e però avremo $-\frac{afdy}{\sqrt{aa+bb}} = udu$, ed integrando $-\frac{2afy}{\sqrt{aa+bb}} = uu + mm$; quando y = 0, cioè nel principio del moto, allora $u = \sqrt{2af}$; dunq. mm = 2af, e l'equazione compita sarà $2af - \frac{2af}{\sqrt{aa+b}}$

$= uu$

$= uu$; ma $y = \frac{a-x}{a}\sqrt{aa+bb}$, dunq. $uu = 2fx$, la medesima para:bola del moto accellerato, e che il grave negli stessi punti dello spazio averà le medesime velocità e si muova di moto accellerato, e ritardato, omettendo l'altre conseguenze che sono troppo chiare.

Rispetto al tempo prendo la formula $\partial t = \frac{\partial y}{u}$; ma $\partial y = \frac{-\partial x\sqrt{aa+bb}}{a}$; dunq. $\partial t = -\frac{\partial x\sqrt{aa+bb}}{a\sqrt{2fx}}$, sostituito in luogo di u il suo valore ed integrando $t = -\frac{\sqrt{2x}\sqrt{aa+bb}}{a\sqrt{f}} + m$; ma nel principio del moto quando $t=0$, allora $x=a$; dunq. $m = \frac{\sqrt{2a}\sqrt{aa+bb}}{a\sqrt{f}}$, e l'integrale compiuto $t = \frac{\sqrt{2a}\sqrt{aa+bb}-\sqrt{2x}\sqrt{aa+bb}}{a\sqrt{f}}$. Condotta dunq. dal punto H (Fig.a 13) della parabola ASH la retta HM parallela all'asse, e condotta una qualunq. ordinata DS prodotta in K, sarà RS il tempo per lo spazio QE, ed MA = HN il tempo per tutta la salita QA eguale al tempo per la scesa AQ. Sicchè ancora in questo caso il corpo trascorre:rà nel medesimo tempo il medesimo spazio di moto accelera:to, e di moto ritardato. E perchè le intercette KS sono egua:li ai decrementi delle ordinate DS, ed esse ordinate DS sono proporzionali alle velocità, saranno dunq. le intercette KS, cioè i tempi della salita proporzionali ai decrementi della velocità, e quindi il moto uniformem.te ritardato.

Ipotesi 2.a

Sia la sollecitazione centrale proporzionale alla distanza del corpo dal centro G delle sollecitazioni (Fig.a 12.a) cioè nella ragione di A:B che diremo h, ed AG = a. Condotta la ret:ta BG, il triangolo ABG sarà la scala delle sollecitazioni, e $TI = \frac{hx}{a}$ sarà la sollecitazione centrale del punto E, on:de sostituita questa in luogo di f nella formula $u = \sqrt{2\int -f\partial x}$ in questo presente caso, avremo $u = \sqrt{2\int -\frac{hx\partial x}{a}}$, ed integrando $auu = -hxx + nn$; ma quando $u=0$, allora $x=a$, e però $nn = haa$, onde l'integrale completo sarà $\frac{auu}{h} = aa - xx$ equazione all'ellissi.

Descritta pertanto (Fig.a 12.a) al semiasse trasverso AG = a, e con

e con il semiasse coniugato $GQ = \sqrt{ah}$ l'ellissi AXQ questa sarà la scala delle velocità, di modo che la velocità nel punto E sarà l'ordinata DX, che corrisponde al punto D egualm.te lontano dal centro G, quanto il punto E ecc.

Rispetto al tempo presa la formula del Teor.a 3° $dt = \frac{ds}{u}$, e sostituito in luogo di ds il differenziale di FE, ma negativo cioè $-\frac{xdx}{\sqrt{xx-bb}}$, ed in luogo di u il suo valore qui sopra ritrovato $\sqrt{aah-hxx}$, sarà $dt = \frac{-xdx\sqrt{a}}{\sqrt{xx-bb}\sqrt{aah-hxx}}$ ed integrando $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}}\int\frac{-xdx}{\sqrt{xx-bb}\sqrt{aa-xx}}$. Dunque descritto col raggio $FA = \sqrt{aa-bb}$, e col centro F il circolo APA (Fig.a 12a) sendo $GE = x$ e condotta l'ordinata EP, l'arco AP è l'integrale della formula $-\frac{xdx\sqrt{aa-bb}}{\sqrt{xx-bb}\sqrt{aa-xx}}$, onde se faremo in proporzione $\sqrt{h}\sqrt{aa-bb}$, $\sqrt{a}$ :: l'arco AP al quarto proporzionale (supplendo l'unità alle dimensioni) esso quarto sarà la misura del tempo per lo spazio AE; ed il quarto proporzionale di $\sqrt{h}\sqrt{aa-bb}$, $\sqrt{a}$, ed il quadrante, ossia l'angolo retto, sarà la misura del tempo per lo spazio AF.

Coroll.° p.°

Se dunq. l'ellisse AXQ è la scala delle velocità per l'inclinata AF, e se la medesima ellisse (Coroll.a 1° Ipotesi 2a) è ancora la scala delle velocità per la verticale AG, ne viene, che le velocità per l'una, e per l'altra linea sono eguali ne' punti egualm.te lontani dal centro.

Coroll.° 2°

Partito il corpo dalla quiete in O, e descritto (Fig.a 12a) l'arco OT col centro G sia $GT = m$, $TI = c$ la scala delle velocità sarà l'ellissi di semiasse trasverso $GT = m$, semiasse coniugato $= \sqrt{mc}$, e l'equazione $\frac{myy}{c} = mm - xx$ come facilm.te si vede. Prendendo la formula del tempo $dt = \frac{ds}{u}$, e sostituito in luogo di ds il differenziale negativo di FE e in luogo di u questo valore, avremo $dt = \frac{-xdx\sqrt{m}}{\sqrt{xx-bb}\sqrt{cmm-cxx}}$

[illegible]

ossia $dt = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{c}\sqrt{mm-bb}} \times \frac{-xdx\sqrt{mm-bb}}{\sqrt{xx-bb}\sqrt{mm-xx}}$, e però integrando $t = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{c}\sqrt{mm-bb}} \int \frac{-xdx\sqrt{mm-bb}}{\sqrt{xx-bb}\sqrt{mm-xx}}$; cioè il quarto proporzionale di $\sqrt{c}\sqrt{mm-bb}$, $\sqrt{m}$, e l'arco di circolo col raggio $FO = \sqrt{mm-bb}$ sarà il tempo dalla quiete in O per la retta OQ; ed il tempo sino al punto 7 sarà il quarto propor=zionale di $\sqrt{c}\sqrt{mm-bb}$, $\sqrt{m}$, ed il quadrante. Il tempo adunq. dalla quiete in A per la retta A7 è $= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}\sqrt{aa-bb}} \times$ quadrante di circolo col raggio $= \sqrt{aa-bb}$; il tempo da O per la retta O7 è $= \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{c}\sqrt{mm-bb}} \times$ quadrante di circolo col raggio $= \sqrt{mm-bb}$ ma i circoli sono proporzionali ai raggi; dunq. il tempo sarà al tempo :: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$, $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{c}}$; ma $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{c}}$ per i triangoli simili ABG, 7yG, dunq. i tempi eguali, ed il moto isocrono.

Corollº 3º.

Qui pure la scala delle sollecitazioni accelleranti è il triangolo; imperciocchè sendo come abbiam veduto, l'espressione generale d'essa sollecitazione accellerante per l'inclinata $= f\frac{\sqrt{xx-bb}}{x}$ sostituito il valore di $f = \frac{hx}{a}$ di questa ipotesi avremo $h\frac{\sqrt{xx-bb}}{a}$ espressione d'essa sollecitazione accelerante in questa ipotesi; ma $\sqrt{xx-bb}$ = allo spazio Q7, dunq. le sollecitazioni accelleranti nella direzione inclinata sono in ogni punto Q proporzionali agli spazj, che rimangono, e però la scala d'esse sarà il triangolo, il quale porta isocronismo.

Corollº 4º. Fig.ª 12.ª

Si mova il [illegible] di moto ritardato da 7 verso A, oppure verso H con quella velocità che avrebbe acquistata cadendo da A in 7. Nella formula $fds = udu$ invece di f si sostituisca la sollecitazione accelerante di sopra ritrovata, ma negativa, ed invece di ds l'elemento contrario di 7Q ed avremo $-fdx = udu$, ma in questa ipotesi $f = \frac{hx}{a}$, dunq. $-\frac{hxdx}{a} = udu$, ed integrando $-\frac{hxx}{a} = uu + mm$. Ma nel principio del moto, cioè nel punto 7 $x = b$, ed $u = \frac{haa - hbb}{a}$; dunque la costante mm deve essere $= -ah$, e però sarà l'integrale $\frac{auu}{h} = aa - xx$ equazione alla medesima ellisse AXQ scala delle

delle velocità nel moto accelerato, e viceversa. Ora presa la $V = G7$, la corrispondente VK è la velocità nel punto 7, e perchè dal punto 7 al punto H il moto è ritardato, ne viene che l'arco KQ sarà inutile, ed il medesimo arco KA sarà la scala nel moto ritardato da 7 ed H.
Rispetto al tempo il medesimo quadrante di circolo AΔR ne sarà la scala: imperciocchè presa la formula $dt = \frac{ds}{u}$, in luogo di ds si deve sostituire il differenziale di C7, ma positivo, ed avremo la medesima equazione di sopra colla sola diversità, che l'omogeneo di comparazione sarà positivo, e però gli archi di circolo proporzionali ai tempi non si dovranno prendere da A verso R, ma all'opposto da R verso A. Ometto altri corollarj, che sono troppo chiari.

Ipotesi 3.ª

Siano le sollecitazioni centrali reciprocam.te proporzionali a quadrati delle distanze. Ancora in questo caso la scala delle velocità sarà la curva delle Ipotesi 5.ª del Probl.º p.º Imperocchè nella formula $u = \sqrt{2\int -f dx}$ sostituita l'espressione della sollecitazione $= \frac{a^3}{2xx}$ in luogo di f, sarà $u = \sqrt{\frac{a^3}{x} + nn}$, integrando attualm.te; ma quando $u = 0$ nel principio del moto, allora $x = a$, e però $nn = -aa$; dunq. l'integrale compito sarà $u = \sqrt{\frac{a^3}{x} - aa}$, ossia $xuu = a^3 - aax$, ch'è la medesima curva accennata. Questa sola avvertenza dovrà aversi, che presa ... qualunq. punto C (Fig.ª 15.ª) nel la inclinata A7, la velocità corrispondente sarà quella ordinata nella curva, che compete al punto nell'asse, egualmente lontano dal centro delle sollecitazioni, quanto è il punto preso nella inclinata, cosicchè la velocità p. esempio nel punto C sarebbe BD.
Rispetto a' tempi presa la formula $dt = \frac{ds}{u}$, e sostituito in luogo di ds il valore $\frac{-xdx}{\sqrt{xx-bb}}$ ed in luogo di u il valore $\sqrt{\frac{a^3 - aax}{x}}$, avremo $dt = \frac{-xdx}{\sqrt{xx-bb}\sqrt{\frac{a^3-aax}{x}}}$, ossia $dt = \frac{-xxdx}{\sqrt{xx-bb}\sqrt{a^3x - aaxx}}$
Se questa equazione fosse integrabile, o almeno riducibile alle quadrature del circolo, o dell'Iperbola, si potrebbero determinare i tempi, ma in questo incontro l'analisi ci abbandona.

Corol.º

Coroll.º 1.º

Si mova il corpo di moto ritardato in F verso A con quella velocità ch'avrebbe acquistata cadendo da A in F. Sendo negativa la sollecitazione ma positivo il differenziale di FE, avremo la medesima equazione di sopra, cioè $u=\sqrt{\frac{a^3}{x}+nn}$. Ma nel principio del moto allora $x=b$, ed $u=\sqrt{\frac{a^3}{b}-aa}$; dunq. la costante aggiunta nn deve essere $=-aa$, e l'equazione sarà $u=\sqrt{\frac{a^3}{x}-aa}$, ch'è la med.ª di sopra.

Rispetto al tempo avremo $dt=\frac{xxdx}{\sqrt{xx-bb}\sqrt{a^3x-aaxx}}$, che involve la med.ª difficoltà di integrale.

Problema 3.º

Determinare nel vuoto le leggi del moto d'un corpo, il quale si mova in una curva.

Cada il mobile (Fig.ª 16.ª) dalla quiete in G nella curva GHE, e sia I il centro delle sollecitazioni, la di cui scala BCF, di modo che descritti al centro I gli archi di circolo GA, HD, le corrispondenti AB, DC esprimano le sollecitazioni de punti G, H. Indi dal punto H condotta la retta HI, e fatta HL $=f$ $=$ DC, essa si risolve nelle due HK perpendicolare alla curva e KL parallela all'archetto HQ, posto l'arco HP infinitam.te prossimo all'arco DH. La prima, cioè HK tutta si perde contro la curva, la 2.da cioè KL, ch'è la tangenziale, opera sola nel corpo. Sia EH $=s$, ID $=x$, AD $=z$; sarà XX $=-dx$, HQ $=-ds$; sendo simili i triangoli QPH, LHK, avremo l'analogia $-ds, -dx :: f$, LK, onde la sollecitazione tangenziale sarà $\frac{fdx}{ds}$. Pertanto nella formula del Teor.ª 4.º $fds=udu$, sostituita questa in luogo di f, e fatto negativo il primo membro, perchè crescendo il moto è negativo il differenziale di EH, cioè ds, avremo $-fdx=udu$, ed integrando $u=\sqrt{2\int -fdx}$, cioè la velocità in qualunq. punto H eguale alla radice della doppia corrispondente area ADCB.

Presa la formula del Teor.ª 5.º $dt=\frac{ds}{u}$, e fatto negativo l'elem.to ds, e sostituito il valore di u, avremo $dt=\frac{-ds}{\sqrt{2\int -fdx}}$, cioè $t=\int\frac{-ds}{\sqrt{2\int -fdx}}$, la qual curva è la scala de' tempi.

Corol.º

Coroll.° p.°

Movasi il corpo o nella curva GHE dalla quiete in G, o nella verticale AC dalla quiete in A, qdo la scala delle sollecitazioni sia la medesima, qualunq. siasi il sistema loro, le velocità ne' punti H, X egualmte lontani dal centro saranno sempre eguali tra di loro, perchè la velocità pure per la verticale è eguale (Artic. p.°) alla radice della doppia area AX(B, il che vale ancora per l'inclinata.

Coroll.° 2.°

Se il corpo posto in X nella retta, ed in H nella curva si moves: se all'insù nella retta, e nella curva, con qlla velocità, che avesse acquistata nella caduta da A, o G avrebbe ne' punti egualmte lontani dal centro I, come in T', ed R velocità ve: si due eguali tra di loro, e le medesime, che avrebbe acquis: tate ne' punti T', ed R cadendo dalla quiete in A, o G. Im: perciocchè nel moto all'insù la sollecitazione è negativa ma è positivo lo spazio onde avremo istantamte $u = \sqrt{2S - fdx}$ (posto ora IT = x) cioè la velocità in ogni punto della solita come in R eguale alla radice della doppia area ATMB, e però eguale alla velocità del medesimo punto nella scesa ed eguale alla velocità nel punto T' nel moto per la retta. e così il corpo passerà di moto ritardato per que' medi. gradi di velocità ne' medesimi punti della curva, per i quali gradi era passato di moto accelerato, e giungerà sino nel punto G. e però generalmte in qualunq. sistema di sollecitazioni un corpo, il quale con una data velocità iniziale sia spinto all'insù, o verticalmte, o per un piano inclinato, o per una curva egli giungerà alla meda. altezza, da cui cadendo avesse acquistata quella data velocità iniziale.

Ipotesi p.a

Sia l'ipotesi della gravità costante, in cui il centro I delle sollecitazioni si prenda come infinitamte lontano, e le direzioni loro parallele. In questo caso gli archi PN, HX, GA passano ad essere linee rette, parallele fra loro, ed orizzontali. Denominato per tanto AX = z avremo $u = \sqrt{2Sfdz}$;

ed integrando attualm.te per essere f costante, $u = \sqrt{2fz}$, omessa l'addizione della costante superflua, e però $uu = 2fz$, equazione alla med.a parabola Apolloniana scala delle velocità del moto per la verticale AC. Rispetto al tempo avremo $dt = \frac{-ds}{u}$, e sostituito il valore di u, sarà $dt = \frac{-ds}{\sqrt{2fz}}$, ossia $t = \int \frac{-ds}{\sqrt{2fz}}$.

Coroll.o p.o

Sicché dunq. movendosi il corpo dalla quiete, o nella retta AC, o nella curva GC, purché i punti G, et A siano nella med.a retta parallela all'orizzonte, le velocità saranno eguali ne' punti egualm.te lontani dall'orizzonte.

Scolio

Data l'equazione della curva, e sostituito in luogo di ds il suo rispettivo valore, se la formula sarà integrabile algebraicam.te, o riducibile alle quadrature del circolo, o dell'iperbola, si potrà in qualche maniera determinare il tempo.

Sia pertanto GHC una cicloide, su cui si mova il grave dalla quiete in G (fig.a 17.a) sia AC = a, AD = z, DH = y l'equazione sarà $dy = \frac{-zdz}{\sqrt{az-zz}}$, e però $ds = \frac{dz\sqrt{az}}{\sqrt{az-zz}}$, onde nella formula di sopra $dt = \frac{-ds}{\sqrt{2fz}}$ sostituito questo valore invece di ds, avremo $dt = \frac{dz\sqrt{az}}{\sqrt{2fz}\,\sqrt{az-zz}}$, ossia $\frac{dz\sqrt{a}}{\sqrt{2f}\sqrt{az-zz}}$

e moltiplicando per $2\sqrt{a}$, $dt = \frac{2a\,dz}{2\sqrt{az-zz}\sqrt{2af}}$, ma l'integrale di $\frac{adz}{2\sqrt{az-zz}}$ è l'arco del circolo descritto col diametro AC = a; dunq. il circolo generatore della cicloide sarà ancora la scala de' tempi, e il tempo sarà proporzionale all'arco diviso per la radice del diametro, di modo che il tempo della caduta per l'arco GH sarà il quarto proporzionale di $\sqrt{2fa}$, 2, e l'arco AB; ed il tempo della caduta per tutto l'arco GC sarà il quarto proporzionale di $\sqrt{2fa}$, 2, ed il semicircolo AC. Ora poiché (prob.a p.o ipotesi 3.a) il tempo della caduta del grave dal

dal punto A per la retta AD è = $\sqrt{\frac{2z}{f}}$ ne viene che il tempo della caduta per l'arco GH della cicloide sarà al tempo per la retta AD, come l'arco AP $\times \frac{2}{\sqrt{2fa}}$, alla $\sqrt{\frac{2z}{f}}$, cioè, come l'arco AP alla ~~...~~ $\sqrt{az}$, vale a dire come la corda all'arco; ed il tempo per tutta la semicicloide GHC al tempo per lo diametro AC, come il semicircolo al diametro stesso. Ed essendo il tempo della caduta per GHC eguale al tempo della salita (corollº. 2º. di questo Corollª.) sarà il tempo per l'intera cicloide al tempo per lo diametro AC, come il circolo tutto ad esso diametro

Ipotesi seconda

Sia la sollecitazione etc.

Sia la sollecitazione

Ipotesi 2ª

Sia la sollecitazione centrale proporzionale alla distan... del corpo dal centro I, e sia (Fig. 16ª) il triangolo IBA la scala d'esse sollecitazioni. Chiamato $BA = h$, $IA = a$, sarà la sollecitazione nel punto $H = \partial S = \frac{hx}{a}$. Sostituita adunque questa in luogo di f nella formola $uu = 2\int -f\,dx$, averemo $uu = 2\int -\frac{hx\,dx}{a}$, ed integrando $-\frac{hxx}{a} = uu + \mathrm{A}$. Ma nel principio del moto quando la velocità è nulla allora $x = a$, adunque l'integrale compito sarà $ah - \frac{h}{a}xx = uu$, o sia $\frac{a\,uu}{h} = aa - xx$, equazione alla ... d'ellisse del primo Teor.ª nell'ipotesi 2ª, e del Prob.ª 2º nella stessa ipotesi.

Rispetto al tempo presa la formola del Teo.ª 3º $dt = \frac{-ds}{u}$, e sostituito in luogo di u il suo valore, averemo $dt = \frac{-ds\sqrt{a}}{\sqrt{aah - hxx}}$

Corollº.

Movasi adunque il grave o nella curva o nella verticale o in una inclinata, le velocità de' punti egualmente lontani dal centro delle sollecitazioni saranno sempre eguale.

Scolio.

Bisogna avertire che l'equazione di sopra del tempo suppone che l'elemento ds della curva sia di curva riferita al foco; onde se la curva su cui si suppone moversi il grave è data alla cartesiana, bisogna ridurla ad equazione al foco per poter sostituire il valore di ds indi l'equazione del tempo così ritrovata, sarà la quesita. Data adunque in questa maniera l'equazione della curva e sostituito nella formola del tempo in luogo di ds il suo rispettivo valore, se la formola sarà integrabile algebraicamte o riducibile alle quadrature del circolo o dell'iperbola si potrà in qualche maniera determinare il tempo. Fig.ª 18ª

qui ci vorrebbe un esempio

Ipotesi

Ipotesi 3.ª

Sia l'ipotesi delle sollecitazioni centrali reciprocamente proporzionale à quadrati delle distanze. Presa la formola generale $u = \sqrt{n\int -f\, dx}$, e sostituita l'espressione della sollecitazione, cioè $f = \frac{a^3}{nxx}$, sarà $u = \sqrt{\frac{a^3}{x} + nn}$, avendo attualmente integrato; ma quando $u = 0$ allora $x = a$ onde $nn = -aa$, e però l'integrale compito sarà $a^3 = uux + aax$ che è la medesima equazione della terza ipotesi nel pr.º e 2.º Prob.ª Onde cada il mobile o per la verticale o per l'inclinata o per una curva, le velocità nè punti egualmente lontani dal centro delle sollecitazioni saranno sempre eguali.

Rispetto à tempi presa la formola del Prob.ª 3.º $dt = \frac{-ds}{u}$ e sostituito in luogo di u il suo valore averemo $dt = \frac{-ds\sqrt{x}}{\sqrt{a^3 - aax}}$.

Qui ci vorrebbe un altro esempio.

Problema 4.º

Ritrovare nel vacuo l'equazione differenziale della curva isocrona, qualunque sia il sistema delle sollecitazioni. Fig.ª 19.ª

Sia la curva MCD la ricercata isocrona e sia f la sollecitazione centrale. Presi nella curva due punti a piacere B, C, sia l'arco CD = z l'arco BD = s. Descritti col centro P ch'è il centro delle sollecitazioni gli archi del circolo MO, BA, siano da A verso D le ascisse = q, ciò posto si muova il grave dalla quiete in B e venga in un tempo infinitam.te piccolo per l'elem.to dell'arco BD, la velo-

cità

ità acquistata sarà pure infinitamente piccola, onde avremo $dz = \frac{ds}{du}$. Nello stesso modo si muova il grave dalla quiete in G, ed avremo $dT = \frac{dz}{dV}$; e perciò $t : T :: \int\frac{ds}{du}$ il tempo per tutto l'arco CD Fig. 19.ª

$\int\frac{dz}{dV}$, cioè il tempo per tutto l'arco BD :: $\int\frac{ds}{du}$, $\int\frac{dz}{dV}$; ma nella curva isocrona questi tempi devono esser uguali, adunque $\int\frac{ds}{du} = \int\frac{dz}{dV}$, ossia $\frac{ds}{du} = \frac{dz}{dV}$, cioè l'elemento dell'arco all'elemento della respettiva velocità in ragione costante. Adunque $ds, du :: m, 1$ ed integrando $s = mu$, cioè l'arco BD proporzionale alla velocità acquistata in D. Ma (Problema 3.°) $u = \sqrt{2\int f dq}$; adunque $s = m\sqrt{2\int f dq}$, ed $ss = 2mm\int f dq$. e differenziando $\frac{sds}{mm} = f dq$ equazione cercata.

Corollo pr.°

In qualunque curva si sa (Teo.ª 5.°) che la sollecitazione tangenziale è $= \frac{f dq}{ds}$; ma in questa nostra isocrona abbiamo $f dq = \frac{sds}{mm}$; adunque la sollecitazione tangenziale nella isocrona sarà $= \frac{s}{mm}$ ciò è proporzionale agli spazj da trascorrersi e però la scala delle sollecitazioni acceleranti il triangolo, il che appunto richiede l'isocronismo come vedremo negli altri problemi ancora. Fig 20.ª

Corol.° 2.°

Se si volesse la scala delle velocità con riferita all asse OP ma alla m.ª curva DBM come asse supponiamo la m.ª curva DBM, e si muova il corpo dalla quiete in M, e giun

to

to ad un qualunque punto come B, la velocità u nel punto B sarà $= \sqrt{2\int f\,dx}$ posto $DA = x$, cioè $u = \sqrt{2\int - \int dq}$; ma nella nostra ipotesi $-f\,dq = -\frac{s\,ds}{mm}$, dunque $u = \sqrt{2\int - \frac{s\,ds}{mm}}$, e facendo l'attual integrazione aggiugnendo la dovuta costante, $m\,u = \sqrt{aa - ss}$ equazione all'elisse, e quando sia $m = 1$, al circolo.

Stessa restante in linea retta la curva DBM Fig.ª 20.ª e descritta col semiasse trasverso $DM = a$, e con il semiasse coniugato $DC = \frac{a}{m}$, l'elisse MRC, essa sarà la scala delle velocità di modo che presa una qualunque $DB = s$ sarà $BR = u$.

Coroll.° 3.°

Rispetto al tempo, presa la formola del Teor. 3.° $dt = -\frac{ds}{u}$, e sostituito il valore di u, cioè $\frac{\sqrt{aa - ss}}{m}$ averemo $dt = -\frac{m\,ds}{\sqrt{aa - ss}}$ e però $t = \int - \frac{m\,ds}{\sqrt{aa - ss}}$, ossia $t = \frac{m}{a}\int\frac{a\,ds}{\sqrt{aa - ss}}$. Ma $\int - \frac{a\,ds}{\sqrt{aa - ss}}$ è l'arco MQ del cerchio MQI descritto col raggio $DM = a$, essendo $DB = s$ l'ascissa; dunque il tempo della caduta da M in B sarà il 4.° proporzionale di a, m, e l'arco MQ; ed il tempo della caduta da M in D, cioè sino all'infimo punto D della curva, sarà il quarto proporzionale di a, m ed il quadrante MQI . . . . Per lo stesso raziocinio se il grave partisse dalla quiete in H, posta $DH = b$, sarebbe $t = \frac{m}{b}\int - \frac{b\,ds}{\sqrt{bb - ss}}$, cioè il tempo da H sino in D il 4.°

proporzionale di b, m, ed il quadrante del circolo, il di cui rag= gio $= b$. Perchè i quadranti sono tra di loro come i rag= gi, sarà il tempo per MD al tempo per HD come m ad m, cioè eguali, appunto come deve portare la curva MBD (Fig. 19.a) s'ella è isocrona. Fig. 27.a

Coroll.o 4.o Fig. 27.a

Sia nella curva isocrona MHD l'arco EH infinitamente prossimo all'arco AB descritto col centro P, e denominato come sopra $DB = s$, $BH = ds$, $DA = q$, sia di più $PD = b$, $AB = y$ indi preso ~~arco~~ all'arco AB eguale l'arco EI sarà $IH = dy$. Quindi per l'analogia $PA\ (b+q)$, $PE\ (b+q+dq) :: AB\ (y)\ EF$ sarà $= y + \frac{ydq}{b+q}$, e però $IF = EF - EI = \frac{ydq}{b+q}$, ed $FH = dy - \frac{ydq}{b+q}$, a. dunque $ds^2 = \overline{BH}^2 = dq^2 + dy^2 - \frac{2ydydq}{b+q} + \frac{yydq^2}{\overline{b+q}^2}$.

Presa adunque la formola generale della curva isocrona $\frac{sds}{mm} = f dq$ e quadrando $\frac{ssds^2}{m^4} = ff\,dq^2$, ma $ss = 2mm\int f dq$, adunque sostituendo in sua vece questo valore, ed il valore di ds^2 ultimamente trovato sarà

$$\overline{dq^2 + dy^2 - \frac{2ydydq}{b+q} + \frac{yydq^2}{\overline{b+q}^2}} \times \frac{2\int f dq}{mm} = ff\,dq^2,$$

o sia $dy^2 - \frac{2ydydq}{b+q} + \frac{yydq^2}{\overline{b+q}^2} = \frac{mmff\,dq^2}{2\int f dq} - dq^2$, e

cavando

cavando la radice $dy - \frac{y\,dq}{b+q} = \pm \frac{dq\sqrt{mmff - 2\int f\,dq}}{\sqrt{2\int f\,dq}}$

equazione generale per tutte le curve isocrone nel vacuo in qualunque sistema di sollicitazione espressa al solito per le assisse, ed ordinate, ma riferita al foco D.

Ipotesi 1.ª

Sia l'ipotesi della gravità costante in questo caso essendo il centro D infinitamente lontano, gli archi AB, EH passeranno ad essere linee rette tra loro parallele, ed IB parallela ad EA e però svanirà la FI, quindi nella nostra equazione fatto $= 0$ il termine $\frac{y\,dq}{b+q} = FI$, sarà della $dy = \pm \frac{dq\sqrt{mmff - 2\int f\,dq}}{\sqrt{2\int f\,dq}}$, e fatta attualmente l'integrazione indicata supposta, la forza f costante $dy = \pm \frac{dq\sqrt{mmff - 2fq}}{\sqrt{2fq}}$ la qual equazione è della cicloide ordinaria, il di cui circolo generatore abbia il diametro $= \frac{mmf}{2}$

Fig.ª 2.ª

Ipotesi 2.ª

Sia l'ipotesi della sollicitazione proporzionale alla distanza dal centro, onde sia $f = b+q$, sostituito questo valore nella equazione sarà della $dy - \frac{y\,dq}{b+q} = \pm \frac{dq\sqrt{mm \cdot \overline{b+q}^2 - 2\int b\,dq + q\,dq}}{\sqrt{2\int b\,dq + q\,dq}}$.

e facendo

e facendo l'integrazioni indicate $dy - \frac{y\,dq}{b+q} = \pm \frac{dq}{b}$
$\frac{\sqrt{mm \times \overline{b+q}^2 - 2bq - qq}}{\sqrt{2bq - qq}}$. equazione dell' epicicloide.

Imperocchè sia EF (Figura 22.a) un arco infinitesimo dell'epicicloide, ed il circolo generatore quando descrive il punto F sia nella posizione AFL e quando descrive il punto E, sia nella posizione BEM. Col centro C, intervallo CE si descriva l'arco di circolo EG, che taglia AFL in D, ed i due raggi CB CA in I G. È chiaro che DF = BA, DE = IG, dunque DF, DE : : BA, IG : : AC, GC = CD. Però condotta DK al centro K del circolo ADL, e prodotta in modo, che KN sia = KC, sarà DN = AC; adunque DF, DE : : DN, DC. Ma l'angolo EDF = CDN. perchè CDE è retto, NDF retto, ed FDC comune; adunque i due triangoli EDF, CDN sono simili. Ciò supposto dal punto F si lasci cadere sopra AC la normale FP, e si chiami KA = r, CA = R, LP = z. Essendo simili i triangoli EDF, CDN, sarà l'elemento della curva EF (ds), DF. : CN, DN; ma DF = $\frac{r\,dz}{\sqrt{2rz - zz}}$, e DN = CA = R, adunque sarà ds, $\frac{r\,dz}{\sqrt{2rz - zz}}$: : CN, R. Per ritrovar la CN si proceda così, AK (r) DA : : KC (R-r), CN, dunque CN = $\frac{DA \times \overline{R-r}}{r}$,

ma

ma $\overset{2v}{LA}$, AF (o sia AD) .. AD, $\overset{2v-z}{AP}$, dunque $AD=\sqrt{2v \times 2v-z}$,

e però $CN = \frac{\overline{R-v}\sqrt{2v-z}\sqrt{2}}{\sqrt{v}}$. Adunque $ds, \frac{vdz}{\sqrt{2v-z}\times z}$

$:: \frac{\overline{R-v} \times \sqrt{2v-z}\sqrt{z}}{\sqrt{v}}$, R, o sia $ds, \frac{dz\sqrt{v}}{\sqrt{z}} ::$

$\overline{R-v} \times \sqrt{z}$, R e integrando $s, 2\sqrt{vz} : \overline{R-v}\sqrt{z}$,

R, ciò è $s = \frac{\overline{R-v}}{R} \times 2\sqrt{2vz}$.

Ora chiamiamo $CG = R - 2v + x$, ciò che sup(p)one $LG = x$ sarà nel triangolo rettangolo CPJ $\overline{R-2v+x}^2 = \overline{R-2v+z}^2 + 2vz - zz$, ed espurgata la equazione, $2vz = \frac{\overline{2R-4v} \times vx + vxx}{R-v}$. quindi avremo finalmente $s = \frac{\sqrt{v}\sqrt{R-v}}{R} \times 2\sqrt{\overline{2R-4v} \times x + xx}$

Ora per la soluzione generale del problema abbiamo ritrovato nella curva isocrona $s = m\sqrt{2\int f\, dq}$. e sostituendo il valore di f in questa ipotesi $s = m\sqrt{2bq + qq}$ Paragonate assieme queste due formole della isocrona e della epicicloide si uniscano in una stessa, mentre sia $R - 2v = b = CL$, ed $m = \frac{2\sqrt{v}\sqrt{R-v}}{R}$. il che era da dimostrarsi

Ipotesi 3.ª

Sia l'ipotesi delle sollicitazioni proporzionali reciprocam.te à quadrati delle distanze dal centro, e facciamo

$b + q =$

$b+g=z$, onde sia $f=\frac{b^3}{zz}$ sostituito questo valore nella formola cioè ... 4°, sarà $dy-\frac{ydz}{z}=\pm dz\frac{\sqrt{\frac{mmb^6}{z^4}-2\int\frac{b^3dz}{zz}}}{\sqrt{2\int\frac{b^3dz}{zz}}}$

e facendo attualmente le integrazioni indicate sarà $dy-\frac{ydz}{z}=\pm dz\frac{\sqrt{\frac{mmb^6}{z^4}+\frac{2b^3}{z}}}{\sqrt{-\frac{2b^3}{z}}}$: ma il denominatore è imaginario. Dunque la curva imaginaria.

Problema 5.°

Ritrovare nella ipotesi della gravità costante la semita, che nel vacuo deve descrivere un grave per giugnere nel minimo tempo da un dato punto ad un altro non posto nella med.a perpendicolare. Fig.a 23.a Fig.a 23.a

Siano A C i due punti dati, ed ABC la semita ricercata. Egli è manifesto, che se la linea ABC è quella, che si descrive nel minimo tempo, ancora due archetti DB, BE infinitesimi, essi pure saranno descritti in tempo minore che altri due qualunque inetti vicino a piacere come DF, FE; imperocchè se ciò non fosse, il tempo per la semita ADFEC sarebbe minore che per ABEC contro il supposto. Chiamato adunque l'archetto $DB=ds$ la velocità $=u$, l'archetto $BE=dz$, la velocità $=V$, il tempo per DB sarà $=\int\frac{dds}{u}$ per $BE=\frac{ddz}{V}$ onde il tempo per $DBE=\int\frac{dds}{u}+\int\frac{ddz}{V}$.

Ora=

2

Averemo adunque p(er) lo metodo de' massimi e minimi $\frac{dds}{u} + \frac{ddz}{V} = 0$, cioè $\frac{dds}{u} = -\frac{ddz}{V}$. Sia ∂F tangente nel punto

E F tangente nel punto ∂, e descritti co' centri ∂, Q gli archetti FH, GB, sarà $BH = -dds$, $FG = ddz$. Ma i triangoli FHB, BOB sono simili, come pure FBG, $B\partial S$ per essere infinitesimo l'angolo BQG: adunque BS, BQ (dz) :: FG (ddz) FB, onde $FB = \frac{dz\,ddz}{BS}$; così pure sarà ∂O, ∂B (ds) :: HB $(-dds)$ FB, e però $FB = -\frac{ds\,dds}{\partial O}$. Sicche sarà finalmente $ddz = -\frac{ds\,dds \cdot BS}{dz \cdot \partial O}$, e sostituito questo valore nella equazione $\frac{dds}{u} = -\frac{ddz}{V}$, averemo $\frac{u\,ds}{\partial O} = \frac{V\,dz}{BS}$, vale a dire che la nostra curva averà questa proprietà che un qualunque archetto d'essa moltiplicato nella corrispondente velocità e diviso per l'elemento dell'ordinata sarà sempre eguale ad un qualunque altro archetto moltiplicato nella corrispondente velocità e diviso per l'elemento della rispettiva ordinata, onde $\frac{V\,dz}{BS} = a$. Sia $MP = x$, $PB = y$, sarà $V = $ [illegible] $\sqrt{2fx}\,\sqrt{dx^2 + dy^2} = -a\,dy$, o sia $2fx\,dx^2 + 2fx\,dy^2 = aa\,dy^2$, cioè $dy = \frac{dx\sqrt{2fx}}{\sqrt{aa - 2fx}}$. Sia la costante arbitraria $a = 2f$ averemo $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{2f - x}}$, equazione della cicloide ordinaria.

Dicea ∂Z tangente del punto [illegible] tangente [illegible]

Per descrivere la cicloide di questa equazione, la quale principiando nel punto A passi pel dato punto C, alla retta AP (Fig.ª n.24.ª) con qualunque circolo generatore a piacer si descriva la cicloide AKL, la quale tagli in un punto come K la retta AC, che unisce i dati punti A, C; indi si faccia l'analogia AK, AC :: AH, AP :: HL, PR, la cicloide ACR descritta col circolo dal diametro PR passerà per lo dato punto C e sarà la curva della equazione $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{2f-x}}$, supposta f = PR. Dimostrazione. Condotte le rette KZI, CVS perpendicolari ad HL, PR, sarà HI, PS :: KH, CP :: AH, AP :: HL, PR, e sarà ZI, VS :: HL, PR, e così l'arco ZL all'arco VR :: HL, PR. Ma è pure KI, CS :: HK, PC :: HL, PR; adunque KI, CS :: ZI, VS ed alternando KI, ZI :: CS, VS, e dividendo KZ, ZI :: CV, VS, cioè KZ, CV :: HL, PR :: arco ZL, arco VR. Ma KZ = arco ZL; adunque CV = arco VR, e sarà il punto C nella cicloide, il che &c. — Fig.ª n.24.ª

Problema 6.º

Ritrovare nel vacuo e nella ipotesi della gravità costante la retta linea, su cui movendosi il grave d'un punto in un dato punto egli giunga da esso punto ad una linea data di posizione, retta o curva, nel minimo tempo.

Sia

[illegible] $dz^2 = dx^2 + dy^2$, e differenziando [illegible] dx, [illegible], e però [illegible] sarà [illegible]; il che [illegible]

Sia (Fig.a n.5.a) il punto dato A, e CD la data di posizione, AD la linea cercata. Chiamata CA = a, CB = y, BD = x, sarà AD = $\sqrt{\overline{a-y}^2 + xx}$. Ma (Probl. n.° Ipotesi p.a) il tempo della caduta per BD al tempo della caduta per AD è come BD ad AD; e (Probl.a p.° il tempo per BD = $\sqrt{x}$, adunque il tempo per AD = $\frac{\sqrt{aa-2ay+yy+xx}}{\sqrt{x}}$, il di cui differenziale per lo metodo de' massimi e minimi dovrà essere = 0; e però differenziando

Fig. n.5.a

$$-\frac{ady+ydy+xdx\sqrt{x}}{x\sqrt{aa-2ay+yy+xx}} - \frac{\frac{1}{2}dx\sqrt{aa-2ay+yy+xx}}{x\sqrt{x}} = 0$$

cioè $xydy - axdy + \frac{1}{2}xxdx - \frac{1}{2}aadx + aydx - \frac{1}{2}yydx = 0$. Sia la data di posizione una retta e perpendicolare ad AC, cioè sia la CM, in questo caso y = 0, dy = 0, adunque cancellati nella nostra equazione i detti termini, si ridurrà a questa $x = a$. Presa adunque CM = a e condotta la retta MA essa sarà quella del minimo tempo fra tutte le infinite, che dal punto A alla CM si ponno condurre.

Sia CD una retta inclinata ad AC. Essendo dato l'angolo DCE è data la ragione del seno retto al seno del complemento, la quale sia di n ad m; adunque n, m :: y, x e $\frac{my}{n} = x$ e differenziando $dx = \frac{mdy}{n}$. Sostituiti nella formola generale questi valori in luogo di x e dx, averemo.

— ma

$$-\frac{maydy}{n}+\frac{myydy}{n}+\frac{1}{2}\frac{m^3yydy}{n^3}-\frac{1}{2}\frac{maady}{n}+$$

$$\frac{maydy}{n}-\frac{1}{2}\frac{myydy}{n}=0$$, e cancellati i termini, che si elidono, e ridotto al comun denominatore sarà.

$$\frac{\frac{1}{2}mnnyydy+\frac{1}{2}m^3yydy-\frac{1}{2}mnnaady}{n^3}=0$$

cioè $\overline{nn+mm}\,yy=nnaa$, o sia $y=\frac{na}{\sqrt{nn+mm}}$.

Presa adunque $CD=AC$, sarà $DQ=\frac{na}{\sqrt{nn+mm}}=y$, ed AD la retta cercata.

Sia CD una parabola Apolloniana, la di cui equazione ~~la di cui equazione~~ $fx=yy$, onde $dx=\frac{2ydy}{f}$. Sostituiti questi valori nella formola generale in luogo di x e dx essa sarà

$$-\frac{ayydy}{f}+\frac{y^3dy}{f}+\frac{y^5dy}{f^3}-\frac{aaydy}{f}+\frac{2ay^2dy}{f}$$

$$+\frac{y^3dy}{f}=0$$, ciò è $\frac{y^5}{ff^3}+\frac{ayy}{f}-\frac{aay}{ff}=0$, o sia $y^4=aaff-affy$. Ciò posto col vertice A, all'asse AC, col parametro $=AC=a$ si descriva la parabola Apolloniana AD, la quale taglierà la parabola data CD in un qualche punto D, la retta AD sarà la cercata. Imperciocchè per la parabola CD sarà $BD=BD=\frac{yy}{f}$: ma per la parabola AD è anco $\frac{y^4}{fff}=aa-ay$, essendo $AB=a-y$; adunque $Q-$

46

Cap. III

Del moto dei corpi nei mezzi resistenti

~~Del moto di corpi ne' mezzi resistenti~~: Definizione prima. Di due sorti è la resistenza del mezzo una assoluta, l'altra relativa. Assoluta si chiama, quando è tale che in tutto il tempo del moto, o sia in ogni punto di spazio si mantiene sempre la stessa, senza punto alterarsi, e tale è per esempio la viscosità del mezzo o sia quella adesione che fra di loro anno le di lui parti, oppure la scabrosità del piano su cui si fa il moto.

Def.ne 3.a quel moto accelerato o ritardato in un mezzo resistente e che per altro sarebbe uniforme se nulla fosse la resistenza del mezzo, chiamerassi moto accelerato, o ritardato derivato dal primitivo uniforme. e se il moto, supposta nulla la resistenza, fosse per esser uniformemente accelerato o ritardato con tale, e tale legge il moto nel mezzo resistente chiamerassi accelerato o ritardato derivato dal primitivo uniformemente accelerato o ritardato con tale e tale legge.

Def.e 4.a Sollecitazione accelerante di un corpo nel mezzo resistente è la differenza della sollecitazione, che avrebbe il corpo nel vacuo e della resistenza del mezzo, di modo che se la sollecitazione nel vacuo è $=f$ e la resistenza del mezzo $=v$, sarà la sollecitazione nel mezzo $=f-v$.

Def.e 2.a Resistenza relativa è quella che è relazione alla velocità attuale del mobile in ogni punto di spazio, ed è variabile.

Problema 7°

Determinare nel mezzo resistente le leggi del moto di un corpo, il quale si muova in una retta che passi per lo centro delle sollecitazioni.

Sia (Fig.a n.6a) AG la retta linea; in cui dal punto A si muove il corpo, G il centro delle sollecitazioni, NDF la scala di esse considerate, non del mezzo, e si chiamino $= f$; lo spazio $= s$, la velocità $= u$, il tempo $= t$, la resistenza del mezzo $= r$. Sarà dunque la sollecitazione nel mezzo resistente $= f - r$ e però per lo Teo.a 4° avremo $f\,ds - r\,ds = u\,du$, la qual equazione costruita ci determinerà la velocità relativamente agli spazi. Rispetto al tempo il Teo.a 3° ci dà $dt = \frac{ds}{u}$ ma per l'equazione di sopra è $ds = \frac{u\,du}{f-r}$ adunque $dt = \frac{du}{f-r}$, ed avremo i tempi relativamente alle velocità. Fig.a n.6a

Coroll.o

Se il mobile con una data velocità fosse spinto verticalmente in alto allora opponendosi al moto e la resistenza del mezzo e la sollecitazione, che opererebbe in senso contrario, la formola dello spazio relativamente alla velocità sarebbe $-f\,ds - r\,ds = u\,du$. Quello del tempo $dt = -\frac{du}{f+r}$

Posizi

Ipotesi prima delle resistenze.

Sia l'ipotesi della resistenza relativa proporzionale alla velocità attuale del corpo, ed assumiamo pure l'ipotesi della gravità costante in cui il moto nel mezzo resistente sarà derivato dal primitivo uniformemente accelerato (Probl.° I.°) e la scala delle sollecitazioni fuori del mezzo sarà una parallela ad AS, ed f costante, ed il centro S comun centro de' gravi sarà infinitamente lontano. Si muova il grave dalla quiete in A. Adunque se la resistenza relativa $\underline{r}$ è proporzionale alla velocità attuale del corpo, fatta la sostituzione di u in luogo di r nella formola generale di sopra, avremo $fds - uds = udu$, o sia $ds = \frac{udu}{f-u}$, ed integrando, $s = u + b + l\,\overline{f-u}$ nella logaritmica della sottangente $= f$. Ma principiando il moto dalla quiete quando $s = 0$, anco $u = 0$, e però $b + lf = 0$, cioè

Fig.ª 27.ª $b = 0$ e la integrale sarà $s = l\,\overline{f-u} - u$.

La formola del tempo sarà $dt = \frac{du}{f-u}$, e però $t = l\,\overline{f-u} + b$. ma quando $t = 0$, allora $u = 0$, onde $b = -lf = 0$, sicchè $t = l\,\overline{f-u}$

Presentata restando (Fig.ª 27.ª) all'assintoto DO colla sottangente $DO = DA = f$ la logaritmica AG in una qualunque $AB = t =$ al tempo e fatto

DAS

DAS angolo semiretto, sarà CI, o sia CS = s = allo spazio percorso dalla quiete nel tempo t = AB, e BC sarà = u = alla velocità acquistata nella caduta per uno spazio = CS.

Scolio

Questo è il medesimo caso di quei moti, che non anno alcuna resistenza, ma nè quali la sollecitazione decresce in proporzione della velocità, che acquista il mobile; come sarebbe per esempio la palla nella cerbottana, la quale prima d'avere acquistata velocità sensibile riceve tutta la sollecitazione del fiato; ma quanto ella si accelera, tanto più fugge alla sollecitazione costante, e così riceve sempre meno impressione in ragione della sua velocità. Tale pure è la sollecitazione del vento nelle navi, supposta nulla la resistenza del fluido.

Coroll.° primo.

Dalla nostra costruzione manifestamente si vede, che crescendo il tempo, cresce lo spazio e la velocità, ma la velocità non potrà mai però giugnere ad eguagliare la AD, se non in tempo infinito, e dopo spazio infinito; onde è che in questa ipotesi di sollecitazioni e resistenze il moto non si ridurrà mai all'equabile.

Coroll.° 2.°

Se vorremo ravvagliare gli spazi trascorsi nel mezzo resistente a quelli, che si sarebbero trascorsi nel vacuo nel medesimo

tempo

tempo AB, chiamati essi spazj nel vacuo $= S$, sappiamo (Prob.ª n.º 7 Ipotesi n.º) essere $tt = \frac{2S}{f}$; adunque al vertice A col parametro $= \frac{2}{f}$ si descriva la parabola AP, e gli spazj nel mezzo a quelli nel vacuo saranno tra loro come CS a BP.

Coroll.º 3.º

E perchè le velocità primitive, o sia nel vacuo sono proporzionali al tempo (Probl.ª n.º 7 Ipotesi n.º Coroll.º n.º) cioè proporzionale ad AB o sia BS, se BC esprime la velocità attuale nel mezzo, sarà SC proporzionale alla velocità perduta della primitiva; cioè gli spazj trascorsi nel mezzo nel tempo AB proporzionale alle velocità perdute dalle primitive nel med.º tempo. Fig.ª

Coroll.º 4.º

[illegible]

Se prolongata la MD in K, tra gli assintoti DK, DA si descriverà l'iperbola equilatera LQ il di cui rettangolo costante DAZ sia $= fb$, chiamata $DL = y$ ed essendo $LQ = MC$ $= f - u$, avremo $f - u = \frac{fb}{y}$ o sia $u = \frac{fy - fb}{y}$. Ma per la formola del tempo $dt = \frac{du}{f - u}$; fatta pertanto la sostituzione, sarà $dt = \frac{y\,du}{fb}$ e $t = \int \frac{y\,du}{fb}$, cioè i tempi proporzionali alle relative aree iperboliche LAZQ. Quindi essendo $dt = \frac{y\,du}{fb}$ ed $u = \frac{fy - fb}{y}$, sarà

$u\,dt = \frac{fy\,du - fb\,du}{fb}$ ma (Teor.ª 3.º) $u\,dt = ds$.
adunque $ds = \frac{y\,du - b\,du}{b}$, ed $s = \frac{1}{b}\int y\,du - bu$; cioè

Lo spazio trascorso nel tempo ZAFQ sarà proporzionale al mistilineo ZHQ. Quindi ancora si vede che crescendo all'infinito il il tempo, crescerà all'infinito lo spazio, ma la velocità non eccederà mai la AB. ♀.

Fig.ª 28.º

Coroll.º 5.º

Se poi il grave incomincierà il moto nel mezzo non dalla quiete, ma con una data velocità costante, che sia $= a$ allora nelle due formole generali, integrandole, bisognerà aggiugnere la necessaria costante, e però sarà $s = -u + b + l\overline{f-u}$; ma posto $s = 0$, allora $u = a$ e però $b = a - l\overline{f-a}$ e l'integrale completo $s = l\overline{f-u} - l\overline{f-a} + a - u$.

Rispetto al tempo $t = l\overline{f-u} + b$; ma quando $t = 0$, allora $u = a$, e però $b = -l\overline{f-a}$, onde l'integrale compito $t = l\overline{f-u} - l\overline{f-a}$.

Perchè descritta la mod.ª Logaritmica di sopra colla suttangente $AB = f$ (Fig.ª 28.ª) all'assintoto BD, indi fatto $AC = a =$ alla velocità iniziale e presa una qualunque ordinata $SI = u$, sarà $FS = l\overline{f-u} - l\overline{f-a} = t$ si tiri FH man-

golo

golo semiretto, onde sia $GH = GF$, indi presa $FL = AC = a$ si conduca LK parallela ad FH e sarà $IK = l\overline{f-u} - l\overline{f-a} + a - u = s$; dal che si vede, che i tempi non principieranno nel vertice della Logaritmica, come nel caso di sopra, ma nel punto F, e preso un qualunque tempo $= FG$, sarà GI la corrispondente velocità, ed IK lo spazio.

Se la velocità iniziale, cioè a fosse maggiore di f, come a dire fosse $= Ae$, allora sodisfarà la medma Logaritmica, ma descritta in senso contrario dall'opposta parte, di modoche preso un qualunque tempo $= FG$, sarà Gi la corrispondente ordinata, e condotta eg in angolo semiretto con la em, sarà $gi = s = l\overline{u-f} - l\overline{a-f} + a - u$. Quivi osservisi, che posta la velocità iniziale maggiore di f la velocità attuale anderà sempre scemando, ma non scemarà mai tanto onde venga eguale ad AB, quindi è, che il moto non si ridurrà mai all'equabile.

Coroll.° 6.°

È pure manifesto che posta la velocità iniziale AC minore di f, esprimeranno le GK la velocità primitive e posta la velocità iniziale maggiore di f, come Ae, le Gg esprimeranno la velocità primitive; ma le velocità attuali

nel mezzo sono GI, Gi, adunque le velocità perdute saranno proporzionali alle IK, ig, ciò è alli spazi trascorsi nel tempo FG.

Coroll.° 7.°

Se la velocità iniziale AC fosse = AB = f, allora lf-a = l0, cioè Logaritmo infinito, nel qual caso z = lf = u - l0, il che fà vedere, che il punto F doverebbe prendersi ad infinita distanza di A; ma allora la Logaritmica si confonde coll'assintoto; sarà dunque GI cioè la velocità attuale = AB = f costante; adunque il moto nel mezzo sarà equabile, quando la velocità iniziale sia eguale alla massima, che può acquistarsi il mobile nel med.° mezzo, ciò è alla gravità del mobile, perche f = ad essa gravità. Ita perche la resistenza viene supposta eguale alla velocità attuale del corpo, ed essa velocità è = f, sarà la resistenza del mezzo = alla gravità.

Coroll.° 8.°

Venga ora spinto il grave dal basso all'alto con tale forza, che la di lui velocità iniziale sia = a. Presa la solita formola $ds = -\frac{udu}{f+v}$, e sostituendo u in luogo

di v

di v, ed integrando, sarà $s = -u + m + l\overline{f+u}$; ma quando $s = 0$, allora $u = a$, adunque $m = a - l\overline{f+a}$, e l'integrale compito sarà $s = a - u + l\overline{f+u} - l\overline{f+a}$.

Rispetto al tempo sarà $dt = \frac{-du}{f+u}$, ed integrando $t = -l\overline{f+u} + n$; ma quando $t = 0$, allora $u = a$ e però $n = l\overline{f+a}$, adunque $t = l\overline{f+a} - l\overline{f+u}$. Descritta pertanto (Fig.ª 29.ª) all'assintoto AD la logaritmica CVE colla sottangente DE $= f$, inclusa l'ordinata AC $= f + a$, ed assunto unquelunque tempo AM, sarà VS la corrispondente velocità, perchè AD $= l\overline{f+a}$, e sarà DM $= l\overline{f+u}$; adunque AM $= t = l\overline{f+a} - l\overline{f+u}$.

Fig.ª 29.ª

Condotta CH in angolo semiretto con CP, sarà VN il corrispondente spazio; imperocchè QV $= a - u$, QN $=$ QC $=$ AM, ma AM $= l\overline{f+u} - l\overline{f+a}$, adunq. $a - u + l\overline{f+u} - l\overline{f+a} =$ NV $= s$.

Coroll.° 9.°

Dopo il tempo BE, in cui il moto si va ritardando, sarà finalmente affatto estinto, essendo in E nulla la velocità; e infatti supposto $t =$ BE $= l\overline{f+a}$, sarà $l\overline{f+u} = 0$, ciò è $u = 0$, e tutto lo spazio in esso

tempo

tempo trascorso sarà proporzionale ad HQ, in fine di cui terminerà il moto del corpo; imperocchè essendo in Q la velocità $=0$ e l'equazione dello spazio $s=a-u+l\overline{f+u}-l\overline{f+a}$, sarà $s=a-l\overline{f+a}$; ma $a=KQ$, $l\overline{f+a}=CK=KH$, adunque $s=KQ-KH=HQ$. E perchè CT è in angolo semiretto con BC, e BC = alla velocità iniziale, sarà SN la velocità primitiva cioè quella nel vacuo corrispondente al tempo BS, onde non divenendo ella $=0$, se non in T, sarà QT il tempo della maggior durata del moto nel vacuo sopra la durata nel mezzo, ed VN la differenza delle velocità proporzionali agli spazi trascorsi nel mezzo. Fig.ª 29ª

Coroll.° 10

Si muova il grave nel mezzo colla velocità derivata dalla primitiva uniforme, ciò è in modo, che se la resistenza fosse nulla egli si moverebbe con velocità uniforme. Divengono le formole dello spazio e del tempo, $ds=\frac{u\,du}{f-u}$, $dt=\frac{du}{f-u}$, essendo in questo supposto nulla la sollecitazione f, si muteranno in $ds=-du$, e $dt=-\frac{du}{u}$. Sia la velocità primitiva uniforme $=a$; adunque integrando

gnando $s = -u + a$, $z = La - Lu$. Descritta adunque dall'assintoto DM (Fig. 30ª) colla sottangente $AD = a$ = alla velocità primitiva, la Logaritmica AC, e presa una qualunque ordinata MC, sarà essa $= u$, e perchè $La = 0$, sarà $MD = z = -Lu$, e $BC = a - u = s$.

Corroll.º II.

Crescendo adunque il tempo, crescerà continuamente lo spazio, ma non giugnerà mai ad essere eguale alla AD, se non in tempo infinito, tanto meno potrà avvanzarla e così all'opposto scemerà sempre la velocità in modo però che non divenga mai nulla, se non dopo tempo infinito. Quindi è, che dal moto primitivo uniforme non nascerà mai moto equabile nel mezzo resistente con questa legge.

Corroll.º III.º

Perchè gli spazi trascorsi con la velocità primitiva sono proporzionali al tempo, ciò è alla AB, ne viene che lo spazio nel mezzo resistente trascorso sarà allo spazio nel vuoto, sumetto il med.º tempo, come BC a BA; ed essendo AD la velocità primitiva, MC la attuale, sarà BC la perduta proporzionale allo spazio trascorso nel tempo AB, e la rimanente MC proporzionale allo spazio, che rimane da trascorrersi.

Ipotesi

Ipotesi seconda delle resistenze

Siano le resistenze del mezzo come i quadrati delle velocità attuali del mobile. Presa adunque la formola generale $f ds - r ds = u du$, e sostituito il valore di r, sarà $ds = \frac{f u du}{ff - uu}$, supplendo alle dimensioni colla costante f. Integrando adunque sarà $s = -l\sqrt{ff - uu} + b$ nella Logaritmica della sottangente $= f$. ma quando $s = o$, anco $u = o$, e però $b = lf = o$ adunque la costante è nulla, onde l'integrale sarà $s = -l\sqrt{ff - uu}$. Presa la formola del tempo $dt = \frac{f du}{f - r}$, e sostituito il valor di r, sarà $dt = \frac{ff du}{ff - uu}$, e integrando $t = \frac{1}{2} l\overline{f + u} - \frac{1}{2} l\overline{f - u}$, cioè $2t = l\overline{f + u} - l\overline{f - u}$ nella Logaritmica della sottangente f ommessa l'addizione della costante superflua.

Fig.a 31.a

Sia adunque la Logaritmica BSF, il di cui asintoto AM, colla sottangente AB, e col raggio AB si descriva il quadrante di circolo BFI e si conduca la corda BI, indi presa una qualunque $DH = u$, si conduca HCE parallela all'asintoto, e sarà $CE = DH = u$, onde $FJ = \sqrt{ff - uu}$. Dal punto J sia JS parallela all'asintoto che incontra la Logaritmica in S ed abbassata la perpendicolare SP, sarà $PA = -l\sqrt{ff - uu} = s$ e però lo spazio trascorso relativamente alla velocità DH sarà PA. Per lo tempo sia $BQ = BC = u$, indi QR parallela ad AI RT a BA, e sarà $AT = l\overline{f+u}$, ma $MA = -l\overline{f-u}$, adunque $MT = l\overline{f+u} - l\overline{f-u} = 2t$.

Cor.

Coroll.° 1.°

Se adunque DH sarà la velocità attuale del mobile sarà HA proporzionale al corrispondente spazio o $\frac{MT}{2}$ al tempo. Da ciò si scorge, che crescendo il tempo, cresce sempre, e lo spazio, e la velocità, ma questa non diverrà però mai maggiore di BA, anzi non la eguaglierà mai, se non quando la logaritmica tocca l'asintoto cioè quando il tempo sarà infinito, a cui corrisponde pure spazio infinito, e per conseguenza il moto non si ridurrà mai all'equabile.

Coroll.° 2.°

Fig.a 3za

Se (Fig.ra 3za) nella retta b a perpendicolare alla b d noi prenderemo una qualunque $bc = BC$ della Fig.a 3ia $= u$, e dal punto b prenderemo le ascisse $bd = \frac{TM}{2} = t$, indi compiremo il parallelogrammo b h, la curva che passerà per tutti i punti h così determinati, sarà la scala delle velocità relativamente a' tempi; e perchè il tempo $t = \frac{1}{2} l f + u - \frac{1}{2} l f - u$, se supporremo $u = f$, sarà $t = \frac{1}{2} l nf - \frac{1}{2} l o$; ma il logaritmo del zero è quantità infinita, adunque perchè la velocità arrivi ad essere eguale ad f $= ba = AB$, ci vorrà tempo infinito e per conseguenza il moto non sarà mai equabile, e se dal punto a si con-

durrà

durrà una parallela a bd, essa sarà l'assintoto della curva bh.

Coroll.° 3°

Se col raggio $ba = AB = f$ si descriverà il quadrante di circolo aem, e si produca hc in e, sarà $ce = \sqrt{ff-uu}$; ma $s = -l\sqrt{ff-uu}$, adunque gli spazj trascorsi ne' tempi bd saranno tra di loro come i logaritmi negativi de' seni degli angoli ebc, i di cui complementi averebbero per seno l'attuale velocità, ed il seno tutto sarebbe la massima velocità possibile $= ba$. Quindi se dal punto m si descriverà la logaritmica mio all'assintoto ba colla sottangente $bm = ba = f$, e dal punto e si faccia eg parallela a bc, e gs parallela ad mb, sarà $gs = \sqrt{ff-uu}$ onde $bs = -l\sqrt{ff-uu}$ logaritmo negativo del seno dell'angolo ebc, onde gli spazi in qualunque tempo bd trascorsi saranno tra di loro come le corrispondenti bs. E qui ancora manifestamente si vede che il tempo e lo spazio saranno infiniti, quando la velocità sia eguale alla massima possibile.

Coroll.° 4°

Condotta bp in angolo semiretto con la bd, sarà la dp la velocità primitiva, sarà adunque hp la velocità perduta dalla resistenza

Coroll.° 5°

Fig.a 33.a

Coroll.o 5.o

Sia (fig.a 33.a) l'iperbola equilatera HQq col semiasse trasverso $AH =$ al semiasse coniugato $AE = f$, ed il quadrante di circolo HCE indi presa una qualunque porzione $AB = u$, sarà $BC = \sqrt{ff-uu} = AD$. Si prenda AO terza proporzionale di AD, AH sarà $AO = \frac{ff}{\sqrt{ff-uu}}$, e per la proprietà dell'iperbola $QO = \frac{fu}{\sqrt{ff-uu}}$. Sia Oq infinitamente prossima ad AQ. Già si sa essere AQq (cioè l'elemento dello settore iperbolico AQH.) $= \frac{f^3du}{2\sqrt{ff-uu}}$, ma essendo ancora $dt = \frac{ffdu}{\sqrt{ff-uu}}$ sarà $\frac{fdt}{2} =$ all'elemento AQq, ed integrando $\frac{ft}{2} = AQH$, cioè il tempo proporzionale al settore iperbolico AQH. Ora poichè $AO = \frac{ff}{\sqrt{ff-uu}}$, ed $OQ = \frac{fu}{\sqrt{ff-uu}}$ sarà $AO, OQ :: f, u$; Quindi se il settore AQH esprime il tempo, la corrispondente AM tangente nel vertice sarà la velocità attuale relativamente ad esso tempo e [illegible] crescendo il tempo, crescerà la velocità ma non giugnerà mai a superare la HK, fatta AK asintoto, ossia non la agguaglierà, se non quando sarà infinito il tempo. Preso adunque [illegible] [illegible] AH la [illegible]

HK eguali a' tempi e fatta KV parallela ed eguale ad HM, la curva HV descritta da' punti V così determinati sarà la scala delle velocità relativamente à tempi e condotta .iR parallela ad HK, essa sarà l'assintoto della curva HV.

Ora poichè sappiamo che la velocità primitiva è proporzionale al tempo sarà la velocità attuale alla primitiva acquistata nel med.° tempo :: u, t, o na : : $\frac{fu}{r}$, $\frac{ft}{r}$; ma $\frac{fu}{r}$ = AMH, ed $\frac{ft}{r}$ = AQH, adunque la velocità primitiva all'attuale come il settore AQH al corrispondente triangolo AMH.

E perchè il tempo per acquistarsi nel vacuo una velocità = f sarebbe proporzionale alla med.a f; sarà adunque il tempo nel vacuo al tempo nel mezzo necessario per acquistarsi una data velocità HM, f, t cioè : : $\frac{ff}{r}$, $\frac{ft}{r}$; ma $\frac{ff}{r}$ = ANH, ed $\frac{ft}{r}$ = AQH; adunque quello a questo : : ANH, AQH.

Se colla sub.ta tangente HA = f, all'assintoto AP si descriverà la logaritmica HS, e si produca la CD, che la incontri in S, e condotto SP parallela ed eguale a CD = $\sqrt{ff-uu}$, sarà AP = $-l\sqrt{ff-uu}$; ~~dunque quando~~ ma sappiamo che lo spazio, cioè s = $-l\sqrt{ff-uu}$, dunque quando il tempo proporzionale al settore AQH la velocità sarà proporzionale alla HM, e sia AB, e lo spazio alla AP.

Coroll.° 6.°

Vegasi annotazione alla pag. [illegible]

Supponga ora il moto non dalla quiete, ma con una velocità iniziale che sia $= a$. Presa la formola del tempo $t = \ell \frac{\sqrt{f+u}}{\sqrt{f-u}} + b$, perchè il tempo è nullo nel principio del moto, allora $u = a$ onde $b = -\ell \frac{\sqrt{f+a}}{\sqrt{f-a}}$, e perciò l'integrale completo sarà $t = \ell \frac{\sqrt{f+u}}{\sqrt{f-u}} - \ell \frac{\sqrt{f+a}}{\sqrt{f-a}}$. Presa adunque (Fig.a 31.a) nella Logaritmica BSH una qualunq. $DH = u$, se dal $\ell \frac{\sqrt{f+u}}{\sqrt{f-u}}$, o sia MT, si sottrarà $\ell \frac{\sqrt{f+a}}{\sqrt{f-a}}$ il residuo sarà il tempo impiegato con la velocità iniziale $= a$. Quindi è, che (Fig.a 30.a) nella curva bh delle velocità relativamente a' tempi, se sia $bc = a$, sarà $bd = \ell \frac{\sqrt{f+a}}{\sqrt{f-a}}$, e presa una qualunque ordinata $vq = u$ sarà $vd = \ell \frac{\sqrt{f+u}}{\sqrt{f-u}} - \ell \frac{\sqrt{f+a}}{\sqrt{f-a}} = t$; onde la curva di questo caso non principiarà nel punto b, ma nel punto h poichè nel punto b abbiamo $\ell \frac{\sqrt{f+u}}{\sqrt{f-u}} = \ell \frac{\sqrt{f+a}}{\sqrt{f-a}}$ e però $t = 0$.

Rispetto dello spazio presa [illegible], [illegible] $s = \ell \sqrt{ff-uu} + b$, [illegible], la velocità iniziale $= a$, quando sia $s = 0$, allora [illegible], sarà $t = \ell \sqrt{ff-aa}$ onde $s = \ell \sqrt{ff-aa} - \ell \sqrt{ff-uu}$. Sia a minore di f, e un (Fig.a 30.a) nella Logaritmica BH preso il logaritmo di $\sqrt{ff-aa}$, e lo si aggiunga ad AP, e sarà $AP + \ell \sqrt{ff-aa} =$ [illegible]

qu[illegible]

Qui pure manifestamente si vede, che crescendo lo spazio, e il tempo cresca sempre la velocità, ma però essa non avanzerà mai la sottangente f della Logaritmica, anzi non arriverà mai ad uguagliarla, se non in tempo infinito e dopo spazio infinito. Fig. 34

Sia ora la velocità iniziale che abbiamo posta $= a$ sia dico maggiore della sottangente f. Presa la formola $s = -l\sqrt{ff-uu} + b$, ed essendo u maggiore di f si mutino i segni della quantità Logaritmica il che non varia l'equalità per la natura della Logaritmica stessa, come è noto; onde sarà $s = l\sqrt{uu-ff} + b$; adunque quando $s = 0$ nel principio del moto allora $u = a$ e però $b = -l\sqrt{aa-ff}$, sicchè l'integrale compiuto sarà $s = l\sqrt{uu-ff} - l\sqrt{aa-ff}$. [illegible] (Fig. 34) sia descritto il quadrante [illegible] e una sottangente $BC = f$ la Logaritmica [illegible] B, [illegible] sia [illegible] tangente del [illegible] in [illegible] [illegible] $AB = a$ sarà $BD = \sqrt{aa-ff} = [illegible] = KR$ onde $KB = l\sqrt{aa-ff}$. Sia [illegible] velocità [illegible] [illegible] CF, [illegible] parallela a [illegible] E sarà $BC = CF = [illegible] = \sqrt{uu-ff}$ e $MB = l\sqrt{uu-ff}$, onde $MK = l\sqrt{uu-ff} - l\sqrt{aa-ff} = s$.

Qui si vede che crescendo lo spazio scema la velocità per la resistenza del mezzo; ma non scemerà mai tanto che divenga $= f$ se non dopo lo spazio infinito, essendo appunto allora infinito il logaritmo, e posta la velocità $= a = AD$ allora $l\sqrt{uu-ff} = l\sqrt{aa-ff}$ e però $s=0$ onde è chiaro questo ancora la massima velocità sarà l'iniziale, indi anderà scemando per la resistenza del mezzo.

Rispetto al tempo presa la formola generale $dt = \frac{du}{ff-uu}$ e mutati i segni per avere u maggiore di f, sarà $dt = \frac{-du}{uu-ff}$, cioè $2dt = \frac{fdu}{u-f} - \frac{fdu}{u+f}$, ed integrando $t = l\sqrt{u-f} - l\sqrt{u+f} + b$; ma quando $t=0$, allora $u=a$ e però $b = l\sqrt{a+f} - l\sqrt{a-f}$, onde $t = l\frac{\sqrt{u-f}}{\sqrt{u+f}} + l\frac{\sqrt{a+f}}{\sqrt{a-f}}$. Ma poichè la tangente BC dell'arco BP è $= \sqrt{uu-ff}$, sappiamo per le note regole dover essere la tangente della metà dell'arco BP uno diviso $= \frac{\sqrt{u-f}}{\sqrt{u+f}}$. Adunque $\frac{\sqrt{u-f}}{\sqrt{u+f}}$ sarà una quantità di una tangente divisa pel raggio. Con simile ragione la tangente della metà dell'arco BV è $= \frac{\sqrt{a-f}}{\sqrt{a+f}}$, onde sarà $\frac{\sqrt{a+f}}{\sqrt{a-f}}$ = al raggio diviso per la med.^{a} tangente.

Sostituendo dunque questi valori nella equazione logaritmica, averemo

$$t = l\,\frac{\text{tang.}^e \text{ di } \frac{1}{2} \text{ arco } BP}{\text{tang.}^e \text{ di } \frac{1}{2} \text{ arco } BV}.$$

Qui pure si scorge che mentre va crescendo il tempo sempre cala la velocità del mobile, che sarà quella infinito, quando questa sia $= f$ onde perchè la velocità si faccia costante ci vorrà spazio infinito, e tempo infinito.

Sia la velocità iniziale eguale alla massima f, che può acquistare il grave nel mezzo resistente, cioè sia $a = f$ Presi le formole del tempo, e dello spazio ne' numeri all' $t = \ell\sqrt{\frac{f+u}{f-u}} - \ell\sqrt{\frac{f+a}{f-a}}$; $s = \ell\sqrt{ff-aa} - \ell\sqrt{ff-uu}$ e l'una e l'altra si muteranno in queste: $t = \ell\frac{\sqrt{f+u}}{\sqrt{f-u}} - \ell\frac{\sqrt{2f}}{\sqrt{0}}$ ed $s = \ell\sqrt{0} - \ell\sqrt{ff-uu}$. ma tanto $\ell\frac{\sqrt{2f}}{\sqrt{0}}$ quanto $\ell\sqrt{0}$ è infinito, adunque in questo caso e t, ed s infiniti; ma tempo infinito e spazio infinito ci danno la velocità attuale del mobile eguale alla sottangente della logaritmica, adunque in questo caso la velocità attuale del mobile sarà sempre costante cioè eguale alla sottangente e sarà il moto uniforme. Lo stesso vale dell'altre due formole $s = \ell\sqrt{uu-ff} - \ell\sqrt{aa-ff}$, $t = \ell\sqrt{\frac{u-f}{u+f}} + \ell\sqrt{\frac{a+f}{a-f}}$ le quali divengono $s = \ell\sqrt{uu-ff} - \ell\sqrt{0}$; $t = \ell\frac{\sqrt{u-f}}{\sqrt{u+f}} + \ell\frac{\sqrt{2f}}{\sqrt{0}}$.

In questo caso la velocità acquisita dal mobile è sempre costante, perchè $v =$ [illegible] nelle stesse circostanze s eguaglia ad l, e [illegible] acceleratrice [illegible] [illegible] nel [illegible] primo [illegible] tempo [illegible] [illegible] ne si [illegible] e lo stesso per la medesima [illegible]

Capitolo 7.°

Sia ora (fig.a 35.ma) spinto il grave in alto dal punto A nel med.o mezzo colla velocità iniziale $= f$. Prese ad [illegible]

La

giova seguendo nei tempicelli secondo, terzo, quarto, e dottrina in [illegible] del [illegible] [illegible]

Le formole generali $ds = \frac{-u\,du}{ff+uu}$, $dt = \frac{-du}{ff+uu}$; ed integrando, sarà $s = \int \frac{-u\,du}{ff+uu} + b$, $t = \int \frac{-du}{ff+uu} + c$.

Col raggio $AB = f$ si descriva il quadrante di circolo DEB e sia BC, DC tangenti, indi presa una qualunque $AH = u$ (Fig. 35ª) se sia HF perpendicolare e si tirino le secanti AC, AF, ed a punti E, G, dove esse tagliano l'arco siano condotte ad AB parallele le DK, GI, ed NL infinitamente prossima ad IG, NM perpendicolare; sarà adunque $AF = \sqrt{ff+uu}$, $AI = \frac{ff}{\sqrt{ff+uu}}$, $IG = \frac{fu}{\sqrt{ff+uu}}$ ed $IL = \frac{-ffu\,du}{(ff+uu)\sqrt{ff+uu}}$. Ora perchè sono simili i triangoli GIA, GMN averemo GN elemento dell'arco $GB = \frac{-ff\,du}{ff+uu}$. Ora essendo $t = \int \frac{-du}{ff+uu} + c$, sarà $t =$ arc: $GB + c$; ma quando il tempo $t = 0$ allora $u = f$, ed il punto G cade nel punto E e l'arco GB è eguale all'arco EB; adunque $c = -$ arco EB e l'integrale compito sarà $t =$ arco $GB -$ arco $EB =$ arco GE.

Sia ora la forza retardatrice della massa grave ne' spazi all'ingiù colla velocità e la resistenza e' v' [illegible] $V = \frac{uu}{a}$, si troverà [illegible] $t = \int \frac{-du}{...} + c$ [illegible] integrale di [illegible] l'arco [illegible] del raggio AB [illegible] e [illegible] $\frac{BC}{AB}$ [illegible] $\frac{CG}{AB}$ [illegible] costante AB [illegible] sia il raggio AB [illegible] e conseguentemente ancora [illegible] sia a AB proporzionale, dunque data la ipotesi, che essendo [illegible] u, si sviluppassero [illegible] corpi colle [illegible] quindi [illegible] continua [illegible] conseguenza [illegible]

Quindi è che presa una qualunque $AH = u$, se prenderemo AX, o sia HZ eguale al corrispondente arco GE, i punti Z determineranno la curva delle velocità relativamente a' tempi. Per lo punto D, all'asintoto AS, colla sottangente $AD = f$ sia descritta la logaritmica DP, e si producano EK, GI, HL in P, Q, R, e sieno PS, Qa perpendicolari ad AS, ed RT ad IQ. Sarà $Qa = IA = \frac{ff}{\sqrt{ff+uu}}$ ed $RT = LI = \frac{-ffudu}{(ff+uu)^{\frac{3}{2}}}$. Ma per la natura della logaritmica sarà

$$\frac{-ffudu}{(ff+uu)^{\frac{3}{2}}} , \frac{ff}{\sqrt{ff+uu}} :: QT , f$$

onde $QT = -\frac{fudu}{ff+uu}$ e $-QI = \int \frac{-fudu}{ff+uu}$; ma $s = \int -\frac{fudu}{ff+uu} + b$; adunque $s = -QI + b$. Per fissare la costante b si osservi che nel principio del moto quando $s = 0$ allora $u = f = AB$, e $QI = PK$, posto, che P sia il principio degli spazj, onde sarà $b = PK$, e però $s = PK - QI$, cioè $s = P\rho$.

Da qui pare apertamente si conosce che quando il tempo è nullo nel principio del moto la velocità è $= f = AB$, e la curva principia nel punto B ed allora il punto Z cade

in

in C e F in E, e per conseguenza F in D, e però lo spazio sarà pure nullo; crescendo il tempo, cala la velocità, e cresce lo spazio di modo, che quando il tempo sia = Ay = all'arco BD, il punto F cade in D e la velocità è nulla e lo spazio sarà BK il massimo, che possa trascorrersi. Dopo del quale e dopo il tempo Ay sarà dalla resistenza del mezzo e dalla gravità distrutta tutta la velocità del mobile; e perchè la metà del quadrante è minore del raggio, sarà pure Ay minore di AV, fatta AV = AB. Ma perchè AV è il tempo, in cui sarebbe distrutta la velocità tutta se nulla fosse la resistenza del mezzo, sarà dunque, posto a quello, cioè il tempo nel vuoto al tempo nel mezzo come AV ad Ay, cioè come AD a BD, o sia come il rettangolo ACD al settore BDA, cioè come il quadrato al circolo

Fig. 36a. iscritto.

Sia (Fig.a 36a) la medesima curva delle velocità nel vuoto a termini BZy, ed il medesimo quadrante ACB. Inoltre CB sia DH = DC ed HC perpendicolare, indi ossia una qualunque DL = di una costante c, tra gli asintoti AD AC si costruisca l'iperbola equilatera che passi pel punto I e ... DK terza proporzionale di DI, DF, cioè $DK = \frac{uu}{f}$, sia K, H ordinata di

mn infinitamente prossima. Sarà $Km = \frac{2udu}{f}$ e per la proprietà dell'iperbola, sarà $KM = \frac{ffc}{ff+uu}$ e $KMmn = \frac{2ffcudu}{ff+uu}$. Ma abbiamo $ds = -\frac{fudu}{ff+uu}$, adunque sarà $2cds = -\frac{2fcudu}{ff+uu}$, e integrando $2cs = -DIMK + \ldots$ Per determinare la costante ... si riflette che ove $s = 0$, allora $u = f$, e però $Dn = f = \ldots$ e $\ldots IMK = DIcC$, onde $\ldots = DIcC$, e l'integrale ... $2cs = DIcC - DIMK$, cioè gli spazii trascorsi ... AD ... sia ... proporzionali all'aree ... CK..C. E qui spazii che rimangono a trascorrersi nel ... tempo ... o sia ..., proporzionali all'aree KMIC. Se il mobile fosse mosso in altro ... velocità uniforme ... tr... nel tempo AD sarebbe proporzionale ad ABXAD; ma lo spazio ritrovato qui sopra è $= \frac{f\,CKMc}{2c}$; adunque se l'iperbola sarà tale che DI sia $= \frac{1}{4}f$, sarà ... spazio a questo :: ABXAD, 2CKMc, ma $AC = \ldots$, adunque ... KDI, 2CKMc, o sia come il ... ADI allo spazio CKMc.

Coroll.° 8.

Si muova il grave in ... ... comunque ... in modo che se la resistenza fosse nulla egli si moverebbe con velocità uniforme, ... le formole generali dello spazio e del tempo, $ds = \frac{fudu}{ff-uu}$; $dt = \frac{fdu}{ff-uu}$, si

mutteranno in queste, $ds = -\frac{f\,du}{u}$, $dt = -\frac{f\,du}{uu}$. Sia la

Fig.ª 37.ª velocità iniziale $= f$ adunque integrando $s = -l\,u + l\,b$ nella logaritmica della suttangente $= f$; ma quando $s = 0$ allora $u = f$; adunque $lb = lf$; onde $s = lf - lu$. Rispetto al tempo sarà $t = \frac{ff}{u} + c$; ma quando $t = 0$ allora $u = f$, onde $c = -f$, e però $t = \frac{ff - fu}{u}$.

Sia adunque (Fig.ª 37.ª) all'asintoto AD colla suttangente AE $= f$ descritta la logaritmica EH; se le ordinate DH o sia AG dinoteranno le velocità attuali saranno le $AD = lf - lu = -lu$, perchè $lf = 0$; cioè sarà $AD = s$. Indi presa $AB = AE = f$, col centro A si descriva l'iperbola equilatera BC. Dal punto H si conduca HG parallela ad AG sarà $GH = u$, e per l'equazione $t = \frac{ff - fu}{u}$, sarà $BG = t$. Presa adunque una qualunque velocità $AG = u$ sarà $AD = s$, $BG = t$.

Sia adunque nel moto quando la velocità è $= f = AE$ il punto D cada nel punto A; ed il punto G in B, onde si vede che lo spazio ed il tempo sono $= 0$ come appunto devono essere. Crescendo lo spazio, ed il tempo, cala sempre la velocità, ma non si ridurrà alla fine mai al nulla, cioè il mobile alla quiete se non dopo spazio infinito e tempo infinito, essendo AD, e BG infinite, ed il punto D in A

[illegible]

Essendo $ds = u\,dt$, cioè $s = \int u\,dt$, ne viene che gli spazi trascorsi AB saranno proporzionali all'aree iperboliche CBFM.

Equazione $t = \frac{ft - fu}{u}$ cioè $u, f-u :: f, t$, cioè la velocità attuale alla perduta nel tempo $t :: f, t$ ossia come BC a BF; ma è ancora $f, u :: t\ f-u$, cioè la velocità prima alla attuale dopo un dato qualunque tempo BF, come BF o sia CP a PM.

Siano nell'iperbola le assisse AB, Aa, AF Al in proporzione geometrica tra di loro, sappiamo, che anco le differenze loro Ba aF, Fl saranno nella medesima proporzione, che le aree Bc, aM Fd saranno tra di loro eguali; che le ordinate BC, ac, FM ld ec. saranno pure in proporzione geometrica inversa. Dunque se queste differenze di assisse rappresentaranno i tempi del moto, sapendo che lo spazio trascorso dal mobile nel tempo Ba, è = all'area CBac, e quello nel tempo BF = CBFM lo spazio trascorso nel tempo Ba a quello nel tempo aF sarà come CBac a caFM, cioè gli spazi uguali alle velocità o sia prime o sia ultime in detti spazi in proporzione reciproca geometrica.

Ipotesi 3.a delle resistenze

Siano le resistenze del mezzo come gli aggregati de' quadrati delle velocità attuali, e delle velocità stesse moltiplicate in una costante. Dunque la formola generale $f dt - r ds = u du$, e sostituendo

rimesso il valore di v, sarà $ds = \frac{f\,u\,du}{ff - uu - au}$. Si faccia $uu + au = qq - \frac{aa}{4}$ e perciò $u + \frac{1}{2}a = q$, $du = dq$. Sostituiti questi valori nell'equazione, sarà allora $ds = \frac{q\,dq - \frac{1}{2}a\,dq}{ff + \frac{aa}{4} - qq}$; ove posto per brevità $ff + \frac{aa}{4} = bb$, sarà $ds = \frac{q\,dq - \frac{1}{2}a\,dq}{bb - qq}$ cioè $ds = \frac{q\,dq}{bb - qq} - \frac{a\,dq}{4b \times b + q} - \frac{a\,dq}{4b \times b - q}$, ed integrando $s = -l\sqrt{bb - qq} - \frac{a}{2b}\, l\sqrt{b + q} + \frac{a}{2b}\, l\sqrt{b - q}$; ma perchè $l\sqrt{b + q}$ è lo stesso che $l\,b\sqrt{b + q}$, sarà $s = -l\sqrt{bb - qq} - \frac{a}{2b}\, l\,\frac{b\sqrt{b + q}}{\sqrt{b - q}} + m$. Per determinare la costante m avvertasi, che posto $s = 0$, è $l\,\frac{b\sqrt{b + q}}{\sqrt{b - q}} = l\,\frac{b\sqrt{b + \frac{1}{2}a}}{\sqrt{b - \frac{1}{2}a}}$, onde $m = \frac{a}{2b}\, l\,\frac{b\sqrt{b + \frac{1}{2}a}}{\sqrt{b - \frac{1}{2}a}}$ e finalmente l'integrale compito sarà

$$s = -l\sqrt{bb - qq} - \frac{a}{2b}\, l\,\frac{b\sqrt{b + q}}{\sqrt{b - q}} + \frac{a}{2b}\, l\,\frac{b\sqrt{b + \frac{1}{2}a}}{\sqrt{b - \frac{1}{2}a}}.$$

Qualunque $l\sqrt{b+q}$ e $l\,b\sqrt{b+q}$ [illegible]

38. Presa adunque $DA = \frac{1}{2}a$, $AB = f$ in ar-
co retto, sarà $DB = b$ e descritto col raggio DB il quadrante di
cerchio CBF, indi presa una qualunque $DH = q$, sarà HE
$\sqrt{bb-qq}$ e per i punti B fisso E variabile condotte
rette FI, FG, sarà $DG = b\frac{\sqrt{b+q}}{\sqrt{b-q}}$, $DI = b\frac{\sqrt{b+\frac{1}{2}a}}{\sqrt{b-\frac{1}{2}a}}$
quindi pel vertice B, all'assintoto AZ, colla sottangente
$B = f$, si descriva la logaritmica $B.N$, sarà $AL =$
$\sqrt{bb-qq}$, indi presa la terza proporzionale di DA
$: \frac{1}{2}a$, $DB = b$, e del logaritmico della ragione $\frac{DG}{DI}$
sottratta da AL, il residuo sarà $= s$; e perchè $q = u +$
$\frac{1}{2}a$, sarà AH la corrispondente velocità.

Fig.a 38.a

Il logaritmo della ragione $\frac{DG}{DI}$ è il logaritmo de' numeri $\frac{AB}{DI}$ relativamente al ... numero AB ... Nel principio ... e ... AB, $DG = DI$, ne risulta $s = fAB - \frac{a}{2}.lAB$ ... ma $lAB = 0$ dunque ...

Quanto al tempo presa la formola $f\,dt = du$, e fatte
le sostituzioni di sopra, sarà $dt = \frac{b\,dq}{bb-qq}$, o sia $dt = \frac{dq}{2b \times b+q}$
$\frac{dq}{2b \times b-q}$, ed integrando sarà $t = \frac{1}{b} l\sqrt{b+q} - \frac{1}{b} l$
$\sqrt{b-q} + n$; e perchè $l\sqrt{b+q}$ è lo stesso che $l b \sqrt{b+q}$,
sarà $t = \frac{1}{b} l\, b\frac{\sqrt{b+q}}{\sqrt{b-q}} + n$, sia fatta $t = 0$, allora
$q = \frac{1}{2}a$, ed $n = -\frac{1}{b} l\, \frac{b\sqrt{b+\frac{1}{2}a}}{\sqrt{b-\frac{1}{2}a}}$, adunque $t = \frac{1}{b}$
$l\, \frac{b\sqrt{b+q}}{\sqrt{b-q}} - \frac{1}{b} l\, \frac{b\sqrt{b+\frac{1}{2}a}}{\sqrt{b-\frac{1}{2}a}}$. Presa adunque
la quarta proporzionale di b, 1, e del logaritmico della ra-
gione $\frac{DG}{DI}$, essa sarà il tempo

trovato il valore di v, sarà $ds = \frac{udu}{\sqrt{ff-uu-au}}$ Si faccia $uu+au = qq - \frac{aa}{4}$ e perciò $u + \frac{1}{2}a = q$, $du = dq$. Sostituiti questi valori nell'equazione, sarà allora $ds = \frac{qdq - \frac{1}{2}adq}{\sqrt{ff+\frac{aa}{4}-qq}}$ e messo per brevità $ff + \frac{aa}{4} = bb$, sarà $ds = \frac{qdq - \frac{1}{2}adq}{\sqrt{bb-qq}}$ cioè $ds = \frac{qdq}{\sqrt{bb-qq}} - \frac{adq}{4b\sqrt{b+q}} - \frac{adq}{4b\sqrt{b-q}}$, ed integrando $s = -\sqrt{bb-qq} - \frac{a}{2b}l\sqrt{b+q} + \frac{a}{2b}l\sqrt{b-q}$; ma perché $l\sqrt{b+q}$ è lo stesso che $l\sqrt{b+q}$, sarà $s = -\sqrt{bb-qq} - \frac{a}{2b}l\frac{\sqrt{b+q}}{\sqrt{b-q}} + m$. Per determinare la costante m avvertasi che $s = 0$, e $l\sqrt{\frac{b+q}{b-q}} = l\frac{\sqrt{b+\frac{1}{2}a}}{\sqrt{b-\frac{1}{2}a}}$, onde $m = l\sqrt{\frac{b+\frac{1}{2}a}{b-\frac{1}{2}a}}$ e finalmente l'integrale completo sarà

$$s = -\sqrt{bb-qq} - \frac{a}{2b}l\sqrt{\frac{b+q}{b-q}} + \frac{a}{2b}l\sqrt{\frac{b+\frac{1}{2}a}{b-\frac{1}{2}a}}.$$

Quantunque $l\sqrt{b+q}$ e $l\sqrt{b+q}$ [illegible]

Fig.ª 38. Presa adunque $DA = \frac{1}{2}a$, $AB = f$ in angolo retto, sarà $DB = b$ e descritto col raggio DB il quadrante di circolo CBF, indi presa una qualunque $DH = q$, sarà $HE = \sqrt{bb - qq}$ e per i punti B fisso E variabile condotte le rette FI, FG, sarà $DG = b\sqrt{\frac{b+q}{b-q}}$, $DI = b\sqrt{\frac{b+\frac{1}{2}a}{b-\frac{1}{2}a}}$.

Quindi pel vertice B, all'assintoto AL, colla sottangente $AB = f$, si descriva la logaritmica BN, sarà $AL = l\sqrt{bb-qq}$, indi presa la terza proporzionale di $DA = \frac{1}{2}a$, $DB = b$, e del logaritmico della ragione $\frac{DG}{DI}$ e sottratta da AL, il residuo sarà $= s$; e perchè $q = u + \frac{1}{2}a$, sarà AH la corrispondente velocità.

Rispetto al tempo presa la formola $fdt = du$, e fatte le sostituzioni di sopra, sarà $dt = \frac{bdq}{bb-qq}$, o sia $dt = \frac{dq}{2b \times b+q} + \frac{dq}{2b \times b-q}$, ed integrando sarà $t = \frac{1}{b} l\sqrt{b+q} - \frac{1}{b} l\sqrt{b-q} + n$, e perchè $l\sqrt{\frac{b+q}{}}$ è lo stesso che $l b \sqrt{b+q}$, sarà $t = \frac{1}{b} l\, b\frac{\sqrt{b+q}}{\sqrt{b-q}} + n$, sia fatta $t = 0$, allora $q = \frac{1}{2}a$, ed $n = -\frac{1}{b} l\, b\frac{\sqrt{b+\frac{1}{2}a}}{\sqrt{b-\frac{1}{2}a}}$, adunque $t = \frac{1}{b} l\, b\frac{\sqrt{b+q}}{\sqrt{b-q}} - \frac{1}{b} l\, b\frac{\sqrt{b+\frac{1}{2}a}}{\sqrt{b-\frac{1}{2}a}}$. Presa adunque la quarta proporzionale di b, 1, e del logaritmico della ragione $\frac{DG}{DI}$, essa sarà il tempo

Fig.ª 38.ª

Il logaritmo della ragione $\frac{DG}{DI}$ e logaritmo del numero $\frac{AB}{Dg}$ relativamente al numero $AB = 1$. Nel principio del moto essendo $\sqrt{b^2-q}$ ... AB, $DG = DI$, ne risulta $s = -fAB - \frac{a}{2} \cdot lA2$ ... ma lAB ... dunque ...

(Fig.ª 39.ª)

Scolio

Se la quantità $\frac{1}{r}a$, che esprime la tenacità del fluido fosse nulla, le formole dello spazio e del tempo sarebbero le med.e della seconda ipotesi, e però della n'è, che un caso di questa.

Fig.a 39.a

Coroll.o 1.o

Dalla costruzione si vede, che crescendo il tempo e lo spazio, cresce ancora continuamente la velocità, ma in modo però che ella non potrà mai divenire maggiore di AF, anzi non gli diverrà eguale senon dopo tempo infinito e spazio infinito perché DG allora è infinita.

Coroll.o 2.o

Le stesse relazioni potranno aversi per mezzo d'una iperbola equilatera. Imperciocché nell'equazione $dt = \frac{du}{ff - uu - au}$ si faccia $-uu - au + ff = \frac{b^4}{xx}$, ed aggiugnendo all'una, e l'altra parte la quantità $\frac{aa}{4}$, sarà $-uu - au + ff + \frac{aa}{4} = \frac{b^4}{xx} + \frac{aa}{4}$ ind. fatta per maggior brevità $ff + \frac{aa}{4} = bb$ e trasponendo i termini, sarà $uu + au + \frac{aa}{4} = \frac{bbxx - b^4}{xx}$, e cavando la radice $u + \frac{1}{2}a = b\sqrt{\frac{xx - bb}{x}}$, e differenziando $du = \frac{b^3 dx}{xx\sqrt{xx - bb}}$. Fatte adunque queste sostituzioni nell'equazione $dt = \frac{du}{ff - uu - au}$, si muterà in questa $dt = \frac{bdx}{\sqrt{xx - bb}}$ o sia $dt = \frac{1}{b} \times \frac{bbdx}{\sqrt{xx - bb}}$. Ma quest'ultimo membro è il differenziale d'uno spazio iperbolico, adunque sia (fig.a 39) all'asse AB col semiasse trasverso $AE = b$ l'iperbola equilatera EBC e presa una qualunque $AC = x$ sarà $CB = \sqrt{xx - bb}$ e condotta AC infinitam.te prossima ad AB, sarà $HCB = \frac{bbdx}{2\sqrt{xx - bb}}$

onde

onde $\underline{dt} = \frac{1}{f}$ ACB, ed integrando, $t = \frac{??}{b}$ ABE + m Che determinarà la costante aggiunta m, avvertasi che quando t = 0 allora u = 0, e però $\frac{aaxx}{4} = bbxx - b^4$, e finalmente $x = \frac{2bb}{\sqrt{4bb-aa}}$.
Fatta adunque $AI = \frac{2bb}{\sqrt{4bb-aa}}$, e condotta l'ordinata SI, il punto B cade in S e lo spazio sarà ASE e però $m = -\frac{?}{b}$ ASE, sicche l'integrale completo $t = \frac{?}{b} \times \overline{ACE - ASE} = \frac{??}{b}$ ABS. Condotte IS, EF parallele a AB, sarà, per la proprietà dell'iperbola $IS = \frac{ab}{\sqrt{4bb-aa}}$ e per la similitudine de' triangoli AIS, ACP, sarà $CP = \frac{a}{2}$, e per la similitudine de' triangoli ACB, AcF, sarà $eF = b \cdot \frac{\sqrt{xx-bb}}{x}$, onde $PF = b\sqrt{\frac{xx-bb}{x}} - \frac{a}{2} = u$. Adunque posto il tempo proporzionale all'area ABS, sarà PF la corrispondente velocità.
Si sà, che se prenderemo $eK = b$, sarà AK assintoto dell'iperbola, e però quando il punto F cada in K, lo spazio ASB, cioè il tempo è infinito; adunque la massima velocità, che possa acquistarsi il mobile dopo un tempo infinito è $= PK = b - \frac{1}{2}a$.
Per avere gli spazi, preso nell'altra parte dell'iperbola col centro A descrivo gli archi di circolo Ms, Dp, In terminati nell'assintoto As e da punti s, p, n siano le ordinate sr, po, nm perpendicolari all'assintoto e si chiami sr = z. Sarà adunque per la proprietà dell'iperbola $zx = \frac{bb}{2}$, ora $2z = \frac{bb}{x}$ e però $2zdx = \frac{bb\,dx}{x}$. Ma perchè $dt = \frac{1}{b} \times \frac{bb\,dx}{\sqrt{xx-bb}}$;

ed

ed $u = b\sqrt{xx-bb} - \frac{1}{2}a$, sarà $udt = \frac{bb\,dx}{x} - \frac{a}{b}\times\frac{bb\,dx}{2\sqrt{xx-bb}}$; ma $udt = ds$, e $\frac{bb\,dx}{x} = 2z\,dx = 2\times$ spaz., ed $\frac{a}{b}\times\frac{bb\,dx}{2\sqrt{xx-bb}} = \frac{a}{b}\times ACB$, adunque integrando sarà finalmente $s = 2\times pAlo - \frac{a}{b}\times ABL + q$. Per determinare la costante q, si avverta, che posta $s = 0$ è ancora $t = 0$, ed il punto M cade nel punto I e lo spazio ABE viene ad essere ASe e lo spazio nAlo sarà nmlA, onde abbiamo $q = \frac{a}{b}\times ASe - 2\times nmlA$ e l'integrale compito $s = 2\times pAlo - 2\times nmlA + \frac{a}{b}\times ASe - \frac{a}{b}\times ABL$ cioè $s = 2\,pomn - \frac{a}{b}\times ABS$; e perchè la velocità nel vacuo è proporzionale al tempo, n'avviene che la velocità nel mezzo sarà alla velocità nel vacuo acquistata in tempo eguale, come il triangolo rettilineo APF all'area iperbolica ASB. Imperciocchè chiamata la velocità nel vacuo $= V$ essendo essa $= t = 2\frac{ABS}{b}$ e la velocità nel mezzo $= u = PF$, sarà $V.\,u :: \frac{2}{b}ABS.\,PF$, ma $b = Al$; adunque $V.\,u :: ABS.\,\frac{Al\times PF}{2}$. E però dopo tempo infinito, che dà nel vacuo velocità infinita e divviene infinita l'area iperbolica ASB, il triangolo APF viene ad essere APK finito cioè la velocità nel mezzo finita.

Corollario 3.

Finalmente il moto nel fluido [illegible] per una data velocità. L'istessa [illegible] minore o maggiore o eguale alla terminale. Chiamando velocità terminale, quella che il mobile nel mezzo averà dopo tempo infinito. Sia in primo luogo minore. [illegible] retta le medesime [illegible] [illegible] serviranno [illegible] mutazione

sarà

vi sarà, se non nel determinare l'addizione della costante. Sia adunq. (Fig.a 38.a) essa velocità $= \frac{1}{2}a$ e minore di AF. Presa la nra formola $s = -l\sqrt{bb-qq} - \frac{a}{2b} l \frac{b\sqrt{b+q}}{\sqrt{b-q}} + m$, per determinare la costante m si avverta che quando $s = 0$, allora $u = \frac{1}{2}a$ e però $q = a$ onde $m = l\sqrt{bb-aa} + \frac{a}{2b} l \frac{b\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}}$ sicchè sarà $s = -l\sqrt{bb-qq} - \frac{a}{2b} l \frac{b\sqrt{b+q}}{\sqrt{b-q}} + \frac{a}{2b} l \frac{b\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}} + l\sqrt{bb-aa}$. Sia AS la velocità iniziale $= \frac{1}{2}a = AO$, condotta la perpendicolare SR e la corda FR prodotta in T, sarà $\gamma T = b\frac{\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}}$, onde lo spazio $s = l\frac{EH}{RS} - \frac{a}{2b} l \frac{\gamma q}{\gamma T}$. Adunque la nostra curva delle velocità relativamte agli spazj non principierà nel punto A, ma nel punto S, ed anderà all'asintoto FX, di modo che la velocità crescerà sempre crescendo lo spazio, ma non arriverà mai ad essere $= AF$, se non dopo spazio infinito, ed infatti posta $u = b - \frac{1}{2}a = AF$, sarà $q = b$, e $l\sqrt{bb-qq}$ infinito. Rispetto al tempo presa la formola $t = \frac{1}{b} l \frac{\sqrt{b+q}}{\sqrt{b-q}} + n$ e posta $t = 0$, si ha $u = \frac{1}{2}a$, e $q = a$; adunque sarà $n = -\frac{1}{b} l \frac{b\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}}$, onde $t = \frac{1}{b} l \frac{b\sqrt{b+q}}{\sqrt{b-q}} - \frac{1}{b} l \frac{b\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}} = \frac{1}{b} l \frac{\gamma q}{\gamma T}$. ... o sia $u = b - \frac{1}{2}a = AF$ allora $q = b$, e sarà $l \frac{b\sqrt{b+q}}{\sqrt{b-q}} = l\, b \cdot \frac{b+q}{0}$, cioè il tempo infinito

Caso IVo. Sia la velocità iniziale, con cui è spinto il grave al

luogo

essendo q uelta a posto s = o q = u [illegible] n, ne segue che [illegible] riu[illegible]zione [illegible] gli non ad n, nea ad n - a

basso, maggiore della terminale AF, sarà ancora q maggiore di DF. Sia adunque la velocità iniziale = n. Si renda la formola solita qui sopra riferita, $s = -l\sqrt{bb-qq} - \frac{a}{nb} \int 0 \frac{\sqrt{b+q}}{\sqrt{b-q}} + m$, la quale, la quale per essere q maggiore di b, deve mutarsi in questa $s = -l\sqrt{qq-bb} - \frac{a}{nb} \int \frac{b\sqrt{b+q}}{\sqrt{q-b}} + m$; poi posta s = o, allora q = n, e sarà $m = l\sqrt{nn-bb} + \frac{a}{nb} \int b \frac{\sqrt{n+b}}{\sqrt{n-b}}$, onde $s = - l \frac{\sqrt{qq-bb}}{\sqrt{nn-bb}} - \frac{a}{nb} \int b \frac{\sqrt{q+b}}{\sqrt{q-b}} + \frac{a}{nb} \int b \frac{\sqrt{n+b}}{\sqrt{n-b}}$.

Al quadrante (Fig.ª 40.ª) DF si tiri la tangente FR nel punto F, indi presa DR = n, ed una qualunque DO = q, e per li punti E, B le rette FEI, FBS terminate dal raggio DC prodotto in I, sarà $FO = \sqrt{qq-bb}$, supposto il raggio = b, e sarà $FR = \sqrt{nn-bb}$, $OE = q-b$, $RB = n-b$

* questa [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

e per la similitudine de triangoli ODF, DEI, sarà $DI = b \frac{\sqrt{q+b}}{\sqrt{q-b}}$, e così per la similitudine de triangoli [illegible] RBF, DBS, sarà $DS = b \frac{\sqrt{n+b}}{\sqrt{n-b}}$. Del punto R colla sottangente $FR = \sqrt{nn-bb}$ si descriva la Logaritmica RM sarà $l\sqrt{nn-bb} = o$, e sarà $s = -lOF - \frac{a}{nb} \int^{DI}_{DS}$. Nel principio del moto il punto O cade in R, e sarà $lOF = o$, onde lo spazio = o, perché ancor il punto I

cade

[illegible]de in G, e così crescendo lo spazio cala la velocità; [illegible] quando il [illegible] I cade in F, allora LOF = all'infinito e [illegible] la velocità non si [illegible] a terminare [illegible] spazio infinito, e il moto non sarà mai equabile.

Rispetto al tempo presa la formola $dt = \frac{dy}{\sqrt{bb - yy}}$, e mutazione, sarà $dt = \frac{-dq}{qq-bb}$, cioè $dt = \frac{dq}{2b \times q+b} - \frac{dq}{2b \times q-b}$, ed integrando, $t = \frac{1}{b} l \frac{\sqrt{q+b}}{\sqrt{q-b}} + m$; ma posto $t = 0$, sarà $q = n$; adunque $m = -\frac{1}{b} l \frac{\sqrt{n+b}}{\sqrt{n-b}}$ e però $t = \frac{1}{b} l \frac{\sqrt{q+b}}{\sqrt{q-b}} - \frac{1}{b} l \frac{\sqrt{n+b}}{\sqrt{n-b}}$, cioè $t = \frac{1}{b} l \frac{[illegible] I}{DS}$. o meglio $t = \frac{1}{b} l \frac{DI}{DS} [illegible]$.

Quando il punto C cade nel punto R, cioè quando la velocità è [illegible] il punto I cioè nel punto S e [illegible] è nullo il [illegible]ritmico della ragione $\frac{[illegible] I}{DS}$ cioè $t = 0$; ma [illegible] la velocità cresce sempre [illegible] in conseguenza il tempo, [illegible] il punto O [illegible] in F cioè quando $u = [illegible]$ [illegible] sarà [illegible] I è infinito e infinito il tempo. [illegible] la velocità non si [illegible] mai di terminare e [illegible] tempo infinito, e così il moto non sarà mai equabile

[illegible] dunque [illegible] KF [illegible] a [illegible] F, [illegible] F in [illegible], onde [illegible] $= [illegible] R$ [illegible] FK proporzionale [illegible] tempi, [illegible] $KQ = CE$, [illegible] [illegible] velocità [illegible] FA [illegible] [illegible] moto con velocità eguale alla terminale [illegible] cioè se il punto R fosse in F, [illegible] $n = [illegible]$ [illegible] [illegible] a F [illegible] $l \frac{\sqrt{n+c}}{\sqrt{n-b}}$ [illegible] $l \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{0}}$

[illegible] [illegible] sàngluo [illegible] lunga [illegible] [illegible] [illegible] sarà KC [illegible]

[illegible]

Quando $u = b = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$, allora nel principio ... e la forza accele-ratrice $f^2 - u^2 - au = f^2 + \frac{1}{4}a^2 - b^2 = 0$. Per questa ragione il moto ... equabile.

quantità infinita, cioè il tempo, e lo spazio infinito, e però lo spazio proporzionale al tempo ed il moto equabile.

Corollario 4°

Sia ora spinto in alto il grave con una data velocità $= b - \frac{1}{2}a$, saranno le formole, in questo caso $ds = \frac{-udu}{ff+uu+au}$, $dt = \frac{-du}{ff+uu+au}$.

Sia $uu + au = qq - \frac{1}{4}aa$, si mutaranno nelle seguenti $ds = \frac{-qdq + \frac{1}{2}adq}{ff - \frac{aa}{4} + qq}$, $dt = \frac{-dq}{ff - \frac{1}{4}aa + qq}$, e finalmente

fatta $ff - \frac{aa}{4} = bb$, saranno $ds = \frac{-qdq + \frac{1}{2}adq}{bb + qq}$; $dt = \frac{-dq}{bb + qq}$.

Col raggio $AB = b$ si descriva il quadrante DEB, e per B, C ... tangente indi presa una qualunque $AH = q$, e sia HF perpendicolare e si conducano le secanti AF, AD, AH, e da punti E, F, dove esse tagliano l'arco siano condotte ad AB parallele le EK, FI, ed IL infinita-mente vicina ad IF ed NM perpendicolare. Sarà dunque $AF = \sqrt{bb+qq}$, $AI = \frac{bb}{\sqrt{bb+qq}}$, $IF = \frac{bq}{\sqrt{bb+qq}}$, ed il differenziale di AI, cioè $IL = \frac{-bbqdq}{(bb+qq)^{\frac{3}{2}}}$. Ora per essere simili i triangoli FIA, LMN, avremo per l'elemento dell'arco $FB = -\frac{bbdq}{bb+qq}$; ma sappiamo che

$dt =$

$dt = -\frac{bb\,dq}{bb+qq} = \Lambda' F$, adunque integrando sarà

$t =$ arco $FB + c$. Per determinare la costante c, quando il tempo è $= 0$ nel principio del [e allora] $q = b$, ed il punto si trova nel punto B, ed in conseguenza F in C, e l'arco FB viene ad esser l'arco CB, onde allora sarà $c = -$ arco CB e però l'integrale compiuto sarà $t =$ arco $FB - CB = FC$

Ma perchè abbiamo posto $q = u + \frac{1}{2}a$, se sarà $AO = \frac{1}{2}a$, sarà $OH = u$ velocità residua della iniziale e FC il tempo, in cui si sarà perduta la velocità BH; ma perchè in C la velocità è nulla, se condurremo $O\underline{a}$ perpendicolare ad AB, e la retta Aa, sarà l'arco cE il tempo massimo, in cui tutta la velocità si esaurisce di moto ritardato, e l'arco Di sarà superfluo.

Quindi

ca 2.

quindi presa una qualunq. $OH = u$, se faremo $HZ = GE = t$, i punti Z descriveranno la curva $\mathcal{B}Zy$ delle velocità relativam.te ai tempi, la qual curva passerà per il punto $\mathcal{B}$, sendo in $\mathcal{B}$ nullo il tempo, e fatta $Oy = il$, passerà per y, sendo allora nulla la velocità.

La curva $\mathcal{B}Zy$ sarà convessa verso [illegible] O, imperciocché presi decrementi di velocità eguali, cioè parti eguali nella retta la, ad essi corrispondono porzioni successivam.te maggiori dell'arco li, cioè [illegible] di tempo sempre maggiori, come facilm.te si può dimostrare per la 3.a prop. del 6.° lib. di Euclide.

Rispetto alla formula dello spazio $ds = -\frac{(q+\frac{1}{2}a)dq}{bb+qq}$ [illegible] descritta all'assintoto AS, pel punto D colla sottangente $AD = b$ la logaritmica DP per essere $IA = \frac{bb}{[illegible]}$, sarà $IL = -\frac{bq}{bb+qq}$ ed essendo per la proprietà della logaritmica $IL : IA :: QT :$ alla sottangente $= b$, sarà $QT = \frac{-bqdq}{bb+qq}$, e però $QI = \int\frac{-bqdq}{bb+qq}$, ma $\int\frac{\frac{1}{2}adq}{bb+qq}$, ossia $\frac{a}{2b}\int\frac{bbdq}{bb+qq} = \frac{a}{2b} \times$ arco GD, dunque $s = QI + \frac{a}{2b} \times$ arco $GD + m$. Per determinare la costante m si osservi, che q.do $s = 0$, allora $q = b$, ed il punto I cade nel punto R, il punto G nel punto E, di modo che QI viene ad essere PK, e l'arco GD passa ad essere DE onde $m = -PR - \frac{a}{2b} \times$ arco DE, e però $s = QI - PK + \frac{a}{2b} \times$ arco $GD - DE$ ossia finalmente $s = -P\rho - \frac{a}{2b} \times$ arco GE.

La quantità $P\rho$ ha il segno negativo per essere in senso negativo nella logaritmica, ma per altro [illegible] è quantità positiva da cui si deve sottrarre l'arco.

Essendo $u = y - \frac{1}{2}a$ posta $y = AO$ la velocità è nulla, e lo spazio deve essere il massimo onde condotta II parallela ad A[illegible], e [illegible] parallela ad BA, sarà $\rho O - \frac{a}{2b} \times$ arco Ei il massimo spazio.

Qui pure si vede, che sendo la velocità $= b - \frac{1}{2}a$ nel principio del moto, allora sarà $P\rho$ zero, e GE zero e però lo spazio nullo; così pure, che calando la velocità, cresce lo spazio. Preso

Presa $Oy = OB$, sendo il tempo nel vacuo proporzionale alla velocità, sarebbe dunq. il tempo in questa legge di resistenza al tempo nel vacuo, come Oy ad Oy, cioè come l'arco IE, ad OB, e moltiplicando per $\frac{AD}{2}$, come $IE \times \frac{AD}{2}$ ad $OB \times \frac{AD}{2}$; cioè il settore IAE al triangolo AaC.
Condotta la retta By, e fatte mz, mn, parallele ad OB, Oy, se HZ esprime il tempo, sarà HB la velocità perduta in esso tempo, OH la residua, ed nm, ossia HZ la perduta nel vacuo. Dunq. la residua alla perduta nel mezzo dopo un dato tempo :: OH, HB, ossia :: $a7$, $7C$, e però :: $aA7$, $7AC$. La residua nel mezzo alla perduta nel vacuo :: OH, HZ; ma $HZ = GE$. adunq. :: $a7$, GE, ossia $aA7$, GAE. La velo[cità] per- duta nel mezzo sarà a quella, che si sarebbe perduta in tempo eguale nel vacuo :: BH, Bn; ma $Bn = nm = GE$, per[chè] nel vacuo le velocità sono come i tempi; dunq. sarà $7C$, GE, ossia :: $7AC$, GAE. Coroll.° 5.°
Si mova il grave con velocità derivata da primitive unifor[mi], cioè nel supposto, che la sollecitazione sia nulla, e sia la veloci- tà iniziale $= f$. Saranno le formule del tempo, e dello spazio $dt = \frac{-du}{uu+au}$, $ds = \frac{-du}{u+a}$. Si faccia $u = \frac{aa}{y}$, onde $uu + au = \frac{a^4 + a^3y}{yy}$ e $du = \frac{-aady}{yy}$. Fatte le sostituzioni sarà $dt = \frac{dy}{a+y}$, ed integran- do $t = l\,\overline{a+y} + m$ nella logaritmica della sottangente a. Ma quando $t = 0$, allora $u = a$, ed $y = a$. Dunq. $m = -l\,2a$, onde $t = l\,\overline{a+y} - l\,2a$. Sia (Figura 4 2.a) ... sottangente $= a = AB$, all'as- sintoto BQ descritta la logaritmica ACI, e si prenda l'ordi- nata $QC = 2a$, indi presa una qualunq. $7I = y$, sarà $MI = a + y$, e però $MB = l\,\overline{a+y}$. ma $QB = l\,2a$, dunq. $MQ = l\,\overline{a+y} - l\,2a = t$. Ma perchè $u = \frac{aa}{y}$, se faremo IF, $7M$; MS, sarà $MS = u$, essendo $QM = t$, ed i punti S così determinati ci descriveranno la curva XS delle velocità relativam.te ai tem- pi la quale principierà nel punto X, perchè sarà allora $y = a$, e però

e però $t=0$, ed anderà all'assintoto BM, imperocchè posta $u=0$, sarebbe $y=\frac{aa}{0}$, cioè infinita, e così pure $l\overline{a+y}$, cioè il tempo infinito. Calerà dunque sempre la velocità, ma non si ridurrà al nullo, se non dopo tempo infinito.

Rispetto allo spazio sarà $ds=\frac{-du}{a+u}$, onde $s=-l\overline{a+u}+m$. ma posta $s=0$, sarà $u=a$, dunque $m=l\,2a$, e l'integrale compiuto sarà $s=l\,2a-l\overline{a+u}$. Dal punto P, in cui è $MP=a+u$ si tiri PG parallela all'assintoto, sarà $HB=l\overline{a+u}$; ma $QB=l\,2a$, dunque $QH=l\,2a-l\overline{a+u}=s$. Dunque se DT è il tempo, sarà DL la corrispondente velocità, e QH lo spazio; dal che si vede, che quando il tempo sia nullo, cioè nel principio del moto, il punto P cade in C, e la velocità sarà $=a$; come supponiamo, ed il punto H cade in Q, e però lo spazio sarà nullo. Crescendo il tempo, cala la velocità, e cresce sempre lo spazio, ma perchè il punto H non caderà mai in B se non quando DL, cioè u sia $=0$, cioè dopo tempo infinito ne viene, che B sarà il limite degli spazj, a cui non giungerà mai il corpo se non dopo tempo infinito. Fig.a 42.a

Scolio

Nella stessa maniera si sciolgono i problemi ne' casi della resistenza assoluta costante, e della resistenza composta della assoluta costante, e della relativa. Sia ne' moti primitivamente accelerati la resistenza assoluta $cd=b$, la sollecitazione $=f$, sarà dunque $fds-bds=udu$, ed integrando $fs-bs=\frac{uu}{2}$ equazione alla parabola Apolloniana col parametro $=2f-2b$ e però le velocità nella ragione subduplicata degli spazj. Rispetto al tempo sarà $dt=\frac{du}{f-b}$, e $t=\frac{u}{f-b}$, cioè i tempi proporzionali alle velocità. Si ommettono le costanti nelle integrazioni, perchè superflue. Fig.a 43.a Se il moto sarà ascensionale ossia ritardato avremo $fds+bds=-udu$, ed integrando $\overline{f+b}\times s=-\frac{uu}{2}+m$. ma posta $s=0$ nel principio del moto, sia $u=a$ sarà $m=\frac{aa}{2}$; dunque $\overline{f+b}\times s=\frac{aa-uu}{2}$, cioè $uu=aa-2fs-2bs$. Sia la parabola Apolloniana ABC col parametro $=2f+2b$,

e sia

e sia l'assissa $AX = \frac{aa}{2f+2b}$, l'ordinata $CX = a$, sarà $XH = s$ spa:zio, ed $HB = u$ velocità.

Il tempo sarà $t = \frac{-u}{f+b} + m$, ma quando $t = 0$, allora $u = a$, onde $m = \frac{a}{f+b}$, e però $t = \frac{a-u}{f+b}$, cioè il tempo proporzionale alle velo:cità perdute.

Sia ne' moti primitivam.te uniformi, cioè in quelli ne' quali è nulla l'azione della gravità, ma il corpo si move in virtù d'un im:pulso communicatogli, sia dico la resistenza $= b$, e la velocità iniziale $= a$; sarà dunq. $r = b$, e però $-b\,ds = u\,du$, ed integrando $bs = -\frac{uu}{2} + m$; ma posta $s = 0$, sarà $u = a$, onde $m = \frac{aa}{2}$ e però $2bs = aa - uu$. Col parametro $= 2b$ sia descritta la parabola Apolloniana ABC (Fig.a 43.a), e presa l'ordinata $XC = a$ velocità iniziale, se XH rappresenterà lo spazio trascorso, sarà $HB = u$ corrispondente velocità, e XA il massimo spazio, dopo di cui sarà estinta tutta la velocità.

Pel tempo avremo $t = \frac{-u}{b} + m$. ma quando $t = 0$, allora $u = a$, e però $m = \frac{a}{b}$; dunq. $t = \frac{a-u}{b}$, cioè il tempo proporzionale ad MB velocità perduta.

Se vogliamo comporre assieme la resistenza costante assoluta colla relativa ne' moti derivati da' primitivam.te accelerati, o ritardati, qualunq. siasi la legge delle resistenze relative, basterà dalla sollecitazione costante sottrarre la resistenza costante; cioè in luogo di f porre f – b (supposta f la gravità, b la resistenza costante) nella scesa ed f + b nella salita, ed avremo le medesime formole. Ritrovate nei problemi di sopra sciolti per le respettive resistenze relative; avremo pure le medesime costruzioni differenziali, salvo dalle costanti

Ne' moti poi primitivam.te uniformi, componendo assieme la resistenza assoluta colla relativa, sarà la sollecitazione $f = 0$, ed $r = b + u$, e però $ds = \frac{-u\,du}{b+u}$ per lo spazio, e $dt = \frac{-du}{b+u}$ pel tempo quanto alla prima ipotesi delle resistenze relative. Sarà $ds = \frac{-u\,du}{bb+uu}$, e $dt = \frac{-du}{bb+uu}$ nella 2da ipotesi. Sarà

e

$ds = \frac{-udu}{bb+bu+uu}$; e $dt = \frac{-du}{bb+b+uu}$ nella terza ipotesi. Ora queste sono già state costrutte nelle sudette ipotesi ne' casi del moto ascenzionale, non vi essendo differenza se non nelle costanti.

Scolio 2°.

Se il corpo non si movesse per linea verticale, ma sopra un piano inclinato, le passate soluzioni dei tre posti problemi egualmente soddisfano; imperciocchè niente altro si varia, se non la sollecitazione accelerante, la quale in questo caso n' sarebbe la gravità; ma la quarta proporzionale del raggio, del seno dell'angolo della inclinazione del piano, e della gravità, come è manifesto, la quale sollecitazione, sendo pure costante, sostituita in luogo di f nelle formule ci darà la medesima costruzione, diverse solo per quantità costanti, come sare bbe per sottangenti di logaritmiche, raggi di circolo et.c

Cap. 2°.

Del moto de' projetti nel vacuo, e delle forze centrali dalle quali i gravi sono trattenuti nelle proprie orbite.

Teorema 1°.

Se un corpo con una data velocità sarà spinto nella direzione di una qualunq. retta linea, ed assieme sollecitato verso un centro immobile fuori di essa in qualunq. sistema di sollecitazioni egli descriverà una curva concava verso il medesimo centro; ed i tempi ne' quali si descrive qualunq. porzione di curva saranno proporzionali all'aree comprese da esse porzioni di curva, e dalle rette condotte dal centro delle sollecitazioni. Fig.a 44.a

Sia spinto il grave (Fig.a 44.a) nella direzione TI con una data velocità, con cui in tempo infinitesimo descriva la porzione infinitesima Tf. Posta $Tf = fI$, descriverebbe egli in tempo eguale la fI, se nulla operasse la forza centrale; ma operando essa coll'avvicinarlo al punto B, supponiamola valevole, a condurlo nel medesimo tempo da f in O. Dunq. sollecitato il corpo dalle due forze nelle direzioni

fI

fI, fO, descritto il parallelogrammo $fIiO$ anderà egli per la diagonale fi, ed in egual tempo si troverà in i. Ma i triangoli fIB, fiB sono eguali, perchè nelle parallele Ii, fB, e sopra la medesima base fB, ed più sono eguali i triangoli BIf, $Bf7$, perchè in basi eguali, e altezze eguali, dunq. saranno eguali i triangoli iBf, $fB7$. Che verificandosi sempre sinchè dura il moto, ne viene, che in eguali tempi e=guali in[?] cresceranno l'aree descritte, e però saranno proporzionali ad essi tempi. E perchè la forza centrale fa deviare il corpo dalla retta fI verso il centro B, e ciò di mano in mano successivam.te, ne viene che la curva sarà concava verso B.

Scolio.

Se la sollecitazione in luogo di essere centripeta, fosse centrifuga ella farebbe deviare il corpo dalla retta fI, scostandolo dal centro B, e la curva sarebbe convessa alla parte di B; ma la proporzione de' tempi ed aree sarebbe la stessa; sicome la stessa sarebbe ancora, se il centro delle sollecitazioni o centripete, o centrifughe fosse infinitam.te lontano, il che per poca attenzione, che vi si ponga facilm.te si scopre.

Problema 9.

Ritrovare l'equazione differenziale riferita al foco della curva descritta dal projetto in qualunq. sistema di sollecitazioni tendenti ad un punto fisso.

Sia B il centro delle sollecitazioni (fig.a 45.a) e scorra il corpo la trajettoria, ossia curva $A7G$. Denominato $B7 = x$, $7G = ds$, $7H$ archetto di circolo col centro $B = dz$, sia $T'7G$ corda prodotta dell'arco $G7$, $O7K$ tangente nel punto 7. $BQ = p$ perpendicolare ad essa tangente. A centro del circolo osculatore, $A7$ raggio $= r$, e si produca BG in K, e centro 7 si tiri l'archetto di cerchio lG. Se

nella

nulla fosse la sollecitazione centrale il corpo nel punto Z spinto dalla forza di proiezione anderebbe con moto equabile per la tangente ZR, ma dalla forza centrale viene ritenuto nella curva; dunq. per un tempo infinitesimo con moto accelerato sarà portato da R in G dalla sollecitazione centrale. Ma (corroll.° 2° Teor.ª 3° cap. p.°) la forza moltiplicata nel quadrato dell'elemento del tempo è eguale al doppio spazio trascorso nel medesimo tempo; dunq. chiamato il tempo = t, averemo $f\,dt^2 = 2\,GR$. Ora per lo metodo de' raggi osculatori si sà essere l'angolo ZRG doppio dell'angolo GZQ, e però $2r, ds :: ds, GQ = \frac{ds^2}{2r}$; ma sono simili i triangoli ZHG, GQR, onde HZ, ZG :: GQ, GR, cioè $dz, ds :: \frac{ds^2}{2r}$, $GR = \frac{ds^3}{2r\,dz}$, il qual valore sostituito, sarà finalm.te $f\,dt^2 = \frac{ds^3}{2r\,dz}$, ma pel Teor.ª $dt = \frac{x\,dz}{g}$, dunq. sarà $f = \frac{gg\,ds^3}{rxx\,dz^3}$. La quantità g è una costante arbitraria, che indica la proporzione del tempo allo spazio.

Coroll.° p.°

Sia BL parallela a QZ, ed in conseguenza ZL = QB = p. Perchè l'angolo BZL è eguale all'angolo HZG, sono simili i triangoli BZL, GZH, e però BZ (x) ZL (p) :: ZG (ds), ZH (dz), onde $x\,dz = p\,ds$; ma $x\,dz = dt$, e (Teor.ª 3° cap. p.°) $dt = \frac{ds}{u}$. dunq. $p\,ds = \frac{ds}{u}$, cioè $p = \frac{1}{u}$, cioè la sottangente BL proporzionale reciprocam.te alla velocità.

Coroll.° 2°

Sia (Fig.ª 46ª) AI la velocità della proiezione, AR la direzione, BQ = p perpendicolare alla tangente di un qualunq. punto G, GZ = ds elemento della curva. Sendo per l'antecedente corroll.° $pu = 1$, sarà ancora BR × AI = 1, fatta BR perpendicolare su AR, e però sarà BR × AI = pu. Ma (Teor.ª 3° cap. p.°) $u\,dt = ds$, ed ancora $pu\,dt = p\,ds$, dunq. BR × AI × dt = $p\,ds$. ma $p\,ds$ = 2 BZG, sicchè sarà

dunque

dunq. $BA \times AI \times dt = 2B7G$, ed integrando, per essere BA.
AI costante sarà $t = \frac{2BGA}{BR \times AI}$ il qual coroll.° è vero ancora nel ca:
so delle curve riferite all'asse, come pure qdo le direzioni delle for:
ze centrali sono parallele.

Coroll.° 3°.

Si conduca (Fig.a 45°) RN perpendicolare ad 7B prodotta, sarà 7N il corradio, il quale si faccia $= l$. sarà dunq. R7 (r) FN (l) :: 7G(ds), FH(dz), cioè $r\,dz = l\,ds$. Ma per lo metodo dei raggi osculatori abbiamo $TS = \frac{1}{2} dp$, e l'angolo 7RG doppio dell'angolo T7S, quindi chiamato $7L = q$, sarà 2R7 $(2r)$, 7G(ds) :: 7S = 7Q (q), ST $(\frac{1}{2} dp)$, e però $q\,ds = r\,dp$; e sostituito in luogo di r il valore $\frac{ds}{dz}$, sarà $q\,dz = l\,dp$; ma $q\,dz = p\,dx$, perchè sono simili i triangoli GFH, 7BL, dunq. $p\,dx = l\,dp$, e $\frac{dx}{l} = \frac{dp}{p}$.

Coroll.° 4°.

Essendo $dt = \frac{ds}{u}$, sostituito questo valore nella formula $f\,dt^2 = \frac{ds^3}{r\,dz}$, sarà $f = \frac{uu\,ds}{r\,dz}$; ma $r = \frac{ds}{dz}$, dunq. $fl = uu$, cioè la velocità media proporzionale tra la sollecitazione, ed il corradio

Coroll.° 5°.

Quindi se FM esprimerà la sollecitazione centrale condotta MO perpendicolare alla tangente FQ, saranno simili i triangoli R7N, 7MO, onde 7R (r), 7N (l) :: 7M (f), MO, e però $r \times MO = fl$; ma $fl = uu$, dunq. $r \times MO = uu$, cioè la velocità media proporzionale tra il raggio osculatore, e la sollecitazione perpendicolare alla curva.

Coroll.° 6°.

Abbiamo veduto nel coroll.° 1°, che $x\,dz = p\,ds$, dunq. nella formula $f = \frac{gg\,ds^3}{r\,xx\,dz^3}$ sostituito questo valore, sarà $f = \frac{gg\,ds}{r\,pp\,dz}$; ma se $x\,dz = p\,ds$, e quindi $\frac{ds}{dz} = \frac{x}{p}$, dunq. $f = \frac{ggx}{r\,p^3}$, cioè la sollecitazione centrale nella ragione composta della diretta della distanza del centro d'esse sollecitazioni e dall'inversa del prodotto del raggio osculatore nel cubo della perpendicolare dal centro delle sollecita:
zioni

zioni alla tangente della curva.

Corollº 7º

Abbiamo nel corollº 3º $r d\rho = q ds$, il qual valore, sostituito nella formula del problema $f = \frac{gg ds^3}{rxx dz^3}$, la muterà in quest'altro $f = \frac{gg ds^2 d\rho}{qxx dz^3}$, ma $x dz = \rho ds$, e $q dz = \rho dx$, dunque fatte le sostituzioni sarà $f dx = \frac{gg d\rho}{\rho^3}$.

Corollº 8º

Preso per costante o l'elemento $7H = dz$, oppure $7G = ds$, o $HG = dx$, i respettivi valori del raggio osculatore sono — $\frac{x ds^3}{ds^2 dz - x dz ddx}$; $\frac{x dz ds}{dz^2 - x ddx}$; $\frac{x ds^3}{dz ds^2 + x dx dd\ldots}$, sostituiti dunque questi valori alla formula generale del problema $f = \frac{gg ds^3}{rxx dz^3}$, avremo $\frac{f}{gg} = \frac{ds^2 - x ddx}{x^3 dz^2}$, posta costante $7H = dz$; $\frac{f}{gg} = \frac{ds^2 dz^2 - x ds^2 ddx}{x^3 dz^4}$, posta costante $7G = ds$; $\frac{f}{gg} = \frac{dz ds^2 + x dx ddz}{x^3 dz^3}$, posta costante $HG = dx$.

Corollº 8º

Facilm. pure potrassi avere l'equazion della sollecitazio-ne senza che si prenda per costante alcuna flussione prima. Imperocchè essendo (corollº 3º) $v d\rho = q ds$, e per i triangoli simili $7GH$, $B7Q$, $7G\,(ds)$, $GH\,(dx) :: B_f\,(x)$, $7Q\,(q)$, cioè $q ds = x dx$, sarà $v = \frac{x dx}{d\rho}$; ma $\rho = \frac{x dz}{ds}$, e differenziando senza assumere costante alcuna, sarà $d\rho = \frac{dx dz ds + x ds ddz - x dz\ldots}{ds^2}$

dunque sostituendo sarà $v = \frac{x dx ds^2}{dx dz ds + x ds ddz - x dz dds}$, ch'è la formula de' raggi osculatori, quando nessuna differenziale è stata assunta costante. Sostituito dunque questo valore in luogo di r nella equazione $f = \frac{ds^3}{rxx dz^3}$, avremo

f

$$\frac{f}{gg} = \frac{\partial x \partial z \partial s^2 + x \partial s^2 \partial\partial z - x \partial z \partial s \partial\partial s}{x^3 \partial x \partial z^3}$$

Problema 2.°

Ritrovare l'equazione differenziale riferita all'asse della curva descritta dal projetto in qualunq. sistema di sollecitazione tendente ad un punto fisso.

Sia A 7 G la curva (Fig.ª 47.ª). B il centro, a cui sono dirette le sollecitazioni, $BC = z$, $C7 = y$, $CM = \partial z$, $HG = \partial y$, $7G = \partial s$. Sia 7 T tangente nel punto 7, B P perpendicolare ad essa, R 7 = r il raggio osculatore, e dal punto B si conduca la retta B G prodotta in K. Lo spazio trascorso dal mobile in virtù della forza centrale sarà K G; quindi col centro 7, ed intervallo 7 G descritto l'arco G E, l'angolo E 7 G è la metà dell'angolo R, e però 2 R 7 (2r), 7 G (∂s) :: 7 G (∂s), $EG = \frac{\partial s^2}{2r}$. Sia si sa essere $TC = \frac{y\partial z}{\partial y}$, $TB = \frac{y\partial z - z\partial y}{\partial y}$, $BP = \frac{y\partial z - z\partial y}{\partial s}$, e perchè sono simili i triangoli KGE, KBP, avremo BP $\left(\frac{y\partial z - z\partial y}{\partial s}\right)$, BK, ossia B 7 $(\sqrt{zz+yy})$ :: GE $\left(\frac{\partial s^2}{2r}\right)$ G K $= \frac{\partial s^3 \sqrt{zz+yy}}{2r \times y\partial z - z\partial y}$ per la similitudine de' triangoli G HS, G M B, sarà GM (y), MB (z) :: G H (∂y), HS $\left(\frac{z\partial y}{y}\right)$ e però $FS = \frac{y\partial z - z\partial y}{y}$, ed il parallelogramo $7Q = y\partial z - z\partial y$, il quale è doppio del triangolo 7 B S, ossia dell'area 7 B G, ossia (Teor.ª 1.°) del tempo ∂t. Dunq. $g\partial t = \frac{y\partial z - z\partial y}{2}$, oppure semplicem.te $= y\partial z - z\partial y$. Ma (Teor.ª 3.° Corroll.° 1.° Cap. 1.°) $f\partial t^2 = 2GK$. Dunq. fatte le sostituzioni in luogo di ∂t, e G K, avremo $\frac{f}{gg} \times \overline{y\partial z - z\partial y}^2 = \frac{\partial s^3 \sqrt{zz+yy}}{r \times y\partial z - z\partial y}$, cioè $\frac{f}{gg} = \frac{\partial s^3 \sqrt{zz+yy}}{r \times \overline{y\partial z - z\partial y}^3}$

Presa per costante o la $CM = \partial z$, oppure $HG = \partial y$, ossia $G7 = \partial s$, i respettivi valori del raggio osculatore in questa curva sono, $r = \frac{-\partial s^3}{\partial z \partial\partial y}$. $r = \frac{\partial s^3}{\partial y \partial\partial z}$. $r = \frac{-\partial z \partial s}{\partial\partial y}$, i quali valori

sostituiti

sostituiti nella formula generale daranno $\frac{f}{gg} = \frac{-\partial z \partial\partial y \sqrt{zz+yy}}{\overline{y\partial z - z\partial y}^3}$, posta costante $CM = \partial z$ | $\frac{f}{gg} = \frac{\partial y \partial\partial z \sqrt{zz+yy}}{\overline{y\partial z - z\partial y}^3}$, posta costante $HG = \partial y$.
$\frac{f}{gg} = \frac{-\partial s^2 \partial\partial y \sqrt{zz+yy}}{\partial z \times \overline{y\partial z - z\partial y}^3}$, posta costante $7G = \partial s$.

Se volessimo l'equazione senza la supposizione (corretto) di alcuna differenziale costante, sarà facil cosa il ritrovarla, perchè già sappiamo, che l'espressione del raggio osculatore in queste curve, quando nessuna flussione sia costante, e $r = \frac{\partial y \partial s^2}{\partial s \partial\partial z - \partial z \partial\partial s}$ il che si ottiene cancellando nella formula del raggio osculatore per le curve riferite al foco il primo termine del denominatore ch'è nullo rispetto agli altri (perchè nelle curve all'asse la x diviene infinita) e ponendo ∂y in luogo di ∂x. Sostituendo dunque nella formula generale in luogo di r il suo valore, avremo

$$\frac{f}{gg} = \frac{\partial s^3 \sqrt{zz+yy}}{\frac{\partial y \partial s^2}{\partial s \partial\partial z - \partial z \partial\partial s} \times \overline{y\partial z - z\partial y}^3},$$

$$\text{cioè } \frac{f}{gg} = \frac{\overline{\partial s^2 \partial\partial z - \partial z \partial s \partial\partial z} \sqrt{zz+yy}}{\partial y \times \overline{y\partial z - z\partial y}^3}$$

Problema 3°.

Ritrovare l'equazione differenziale riferita all'asse della curva descritta dal projetto in qualunque sistema di sollecitazioni parallele fra loro.

Sarà (Fig.ª 47.ª) in questo caso KG parallela ad $7C$, ed il [illegible] angolo KEG simile al triangolo ECJ, ossia $GH7$, e però $KG = \frac{\partial s^3}{a r \partial z}$. Il tempo sarà proporzionale anco in questo caso all'area, cioè al parallelogrammo nella base $7H$, e d'altezza infinita, cioè proporzionale alla base $7H$, perchè se differenze finite non tolgono l'equalità tra quantità infinite, i parallelogrammi d'altezza infinita sono come le basi; dunque $\frac{\partial t}{g} = \partial z$, e però l'equazione $f\partial t^2 = 2GR$, sarà

$\frac{f}{gg}=\frac{ds^3}{r dz^3}$. Sostituendo dunq. i respettivi valori del raggio osculatore, avremo —

$\frac{f}{gg}=\frac{-ddy}{dz^2}$, posta dz costante. $\frac{f}{gg}=\frac{dy\,ddz}{dz^3}$, posta dy costante.

$\frac{f}{gg}=\frac{-ds^2 ddy}{dz^4}$, posta ds costante.

Preso poi il valore del raggio osculatore, qdo nessuna flussione prima è stata presa costante avremo $\frac{f}{gg}=\frac{ds^2 ddz - dz\,ds\,dds}{dy\,dz^3}$

in cui nessuna flussione è supposta costante.

Scolio p.o

Dalle equazioni generali de' passati problemi, le quali non suppongono alcuna differenziale costante, qdo si modifichino secondo il bisogno, si deducono l'altre particolari in qualunq. supposizione di costante. Se per esempio noi vogliamo supporre costante ds, perchè $ds^2=dz^2+dy^2$, differenziando sarà $dz\,ddz+dy\,ddy=0$, e però $dz\,ddz=-dy\,ddy$. Nelle equazioni generali si cancelli dunq. il termine in cui evvi dds perchè è nullo in questa supposizione, ed in luogo di ddz si sostituisca $-\frac{dy\,ddy}{dz}$, ed avremo l'equazione particolare di questo supposto. Simil.te si faccia nell' altre supposizioni.

Scolio 2.o

Servono generalm.te le precedenti formule per la soluzione del problema diretto, ed inverso delle forze centrali, cioè data l'equazione della curva, ritrovare il valore della forza centrale, oppure data .. forza centrale, ritrovare la natura della cur... Fra tutte però la più spedita per le curve, e forze riferite .. .. punto fisso sarà quella del Corol.o 7.o perchè per mezzo di essa si sfuggono le seconde differenze. Gli appresso esempj faranno vedere l'uso delle ..rposte

Esempio p.o

Sia (Fig.a 48.a) la logaritmica spirale ABC, in cui l'elemento dell'assissa ...

dell'ascissa è sempre in data ragione all'elemento dell'ordinata. Sia R il centro delle forze, e sia $RB = x$, $BD = \partial z$, sarà $a\partial x = b\partial z$ l'equazione della curva. Si supponga ∂z differenziale costante; dunq. differenziando l'equazione della curva, sarà $a\partial\partial x = 0$. quindi presa la formula $f = \frac{\partial s^2 - x\partial\partial x}{x^3\partial z^2}$, ch'a questa supposizione corrisponde, svanirà il termine $x\partial\partial x$ e sarà $f = \frac{\partial s^2}{x^3\partial z^2}$; ma $\partial s^2 = \partial z^2 + \partial x^2$, e per l'equazione della curva $\partial x^2 = \frac{bb\partial z^2}{aa}$, dunq. $\partial s^2 = \frac{aa\partial z^2 + bb\partial z^2}{aa}$, onde fatta la sostituzione sarà finalm.te $\frac{f}{gg} = \frac{aa+bb}{aa\,x^3}$, cioè la forza reciprocam.te proporzionale a' cubi della distanza dal centro. Colla stessa maniera procedasi ne' supposti d'altre differenziali costanti, e si troverà la medesima conclusione.

Se nessuna flussione prima è presa costante, si serviremo della formula $\frac{f}{gg} = \frac{\partial x\partial z\partial s^2 + x\partial s^2\partial\partial x - x\partial z\partial s\partial\partial s}{x^3\partial x\partial z^3}$ in cui è in nostro arbitrio di fare costante quella differenziale, che più ci piacerà e sia per esempio costante ∂s, dunq. $\partial\partial s = 0$. Ma $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial z^2$, e per l'equazione della logaritmica $\partial x^2 = \frac{bb\partial z^2}{aa}$, dunque $\partial s^2 = \frac{bb\partial z^2 + aa\partial z^2}{aa}$, e pertanto se ∂s è costante, cioè se $\partial\partial s = 0$, sarà ancora $\partial\partial z = 0$. Cancellati dunq. nella formula generale i due ultimi termini, sarà $\frac{f}{gg} = \frac{\partial s^2}{x^3\partial z^2}$ e sostituito il valore di ∂s, sarà finalm.te $\frac{f}{gg} = \frac{aa+bb}{aa\,x^3}$, come sopra.

Presa la formula del Corollario 7.° $\frac{f\partial x}{gg} = \frac{\partial p}{p^3}$, sia $RP = p$ perpendicolare alla tangente BS. Nella logaritmica spirale già sappiamo essere $p = \frac{ax}{\sqrt{aa+bb}}$, e però $\partial p = \frac{a\partial x}{\sqrt{aa+bb}}$, dunq. sostituiti questi valori $\frac{f\partial x}{gg} = \frac{a\partial x \times \sqrt{aa+bb}^{\,3/2}}{\sqrt{a^2+b^2} \times a^3x^3}$, cioè espurgando $\frac{f}{gg} = \frac{aa+bb}{aa\,x^3}$.

Esempio 2.°

Sia la medesima curva ABC la spirale iperbolica la di cui sottangente, ch'è sempre costante, sia $RS = a$, e denominato, come sopra, l'equazione della curva sarà $x\partial z = a\partial x$. Si supponga costante ∂x, dunq. $x\partial\partial z + \partial z\partial x = 0$ quindi presa

presa la formola che a questa supposizione corrisponde, cioè $\frac{f}{ss} = \frac{\partial z \partial s^2 + x\partial x \partial\partial z}{x^3 \partial z^3}$, e sostituito il valore di $\partial\partial z$, avremo $\frac{f}{ss} = \frac{\partial s^2 - \partial x^2}{x^3 \partial z^2}$; ma $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial z^2$, dunq. $f = \frac{ss}{x^3}$, cioè la forza è reciproca proporzionale a' cubi della distanza, come nella logaritmica spirale.

Prendiamo la formola del corollº 7º $\frac{f\partial x}{ss} = \frac{\partial \rho}{\rho^3}$. Nella spirale iperbolica sappiamo essere $PIP = \frac{ax}{\sqrt{xx+aa}} = \rho$, perchè (probl.ª pº (corollº pº) $\rho\partial s$, ossia $\rho\sqrt{\partial x^2+\partial z^2} = x\partial z$, ma per l'equazione della curva $\partial z = \frac{a\partial x}{x}$, dunq. $\rho = \frac{ax}{\sqrt{xx+aa}}$, onde $\partial\rho = \frac{a^3\partial x}{\overline{xx+aa}^{\frac{3}{2}}}$. dunq. sostituendo questi valori, sarà $\frac{f\partial x}{ss} = \frac{a^3\partial x \times \overline{xx+aa}^{\frac{3}{2}}}{\overline{xx+aa}^{\frac{3}{2}} \times a^3 x^3}$, cioè finalm.te $f = \frac{ss}{x^3}$

Esempio 3º.

Sia l'equazione generale delle sezioni coniche riferite all'asse $\pm \frac{cz}{b} = \sqrt{zz+yy}$, la quale esprime la parabola apolloniana col parametro $= 2a$, se sia $c = b$; se sia $b > c$ esprime l'ellissi, i di cui assi, trasverso $= \frac{2abb}{bb-cc}$, conjugato $= \frac{2ab}{\sqrt{bb-cc}}$, e la distanza del foco, ossia umbilico dal vertice $= \frac{ab}{b+c}$; se $b < c$ esprime l'iperbola i di cui assi, trasverso $= \frac{2abb}{cc-bb}$ conjugato $= \frac{2ab}{\sqrt{cc-bb}}$ distanza del foco dal vertice $= \frac{ab}{b+c}$; se $c = 0$, esprime il circolo col raggio $= a$. Notisi che le asisse si prendono dal foco, e però si scriverà il segno negativo, qdo sono dalla parte del vertice, e positivo nell'altro caso. Tendano le forze al foco di esse sezioni. Alle formule del secondo problema facilm.te si verremo alla soluzione, e però sia la formula generale del corollº d'esso problema $\frac{f}{ss} = \frac{\partial s\,\partial\partial z - \partial z\,\partial s\,\partial\partial s\,\sqrt{zz+yy}}{y \times \overline{y\partial z - z\partial y}^3}$

Differenziando adunq. la proposta equazione alle sezioni coniche sarà $\pm \frac{c\partial z}{b} = \frac{z\partial z + y\partial y}{\sqrt{zz+yy}}$, e di nuovo differenziando per costante [illegible] come ∂z, avremo $\partial\partial y = \frac{zzy\partial y \partial z - zzy\partial y^2 - yy\partial z^2}{zzy+y^3}$. ma essendo $\partial s^2 = \partial z^2 + \partial y^2$, sarà $\partial s\partial\partial s = \partial y\partial\partial y$, perchè $\partial\partial z = 0$. Cancellato dunque il primo termine nella formula generale,

e sostituendo

e sostituito $dy\,ddy$ in luogo di $ds\,dds$, sarà ella $\frac{f}{ss} = \frac{-dz\,ddy\sqrt{zz+yy}}{\overline{ydz-zdy}^3}$;
e sostituito pure il valore di ddy dato per l'equazione delle sezioni coniche sarà $\frac{f}{ss} = \frac{-2zy\,\overline{ydz^2+zzdz\,dy}^2+yydz^3\sqrt{zz+yy}}{\overline{zzy+y^3}\times\overline{ydz-zdy}^3}$,
e dividendo per $\overline{ydz-zdy}^2$, $\frac{f}{ss} = \frac{dz\sqrt{zz+yy}}{\overline{zzy+y^3}\times\overline{ydz-zdy}}$; ma

per la data equazione $dy = \frac{\pm c\,dz\sqrt{zz+yy}-bzdz}{by}$; dunque si sostituisca questo valore, ed avremo $\frac{f}{ss} = b\times\overline{zz+yy}^{\frac{1}{2}} \mp cz \times \overline{zz+}$...
Ma per la data equazione abbiamo $\pm cz = b\sqrt{zz+yy} - ab$, dunque $\frac{f}{ss} = \frac{1}{a\times zz+yy}$. Sicchè nelle sezioni coniche la forza tendente al foco sarà sempre nella ragione inversa duplicata delle distanze dal centro di esse forze.

Esempio 4°.

Si muova il corpo nell'Ellissi, o iperbola, e tendano le forze al centro di esse curve e sia l'equazione riferita all'asse $zz-aa=\pm\frac{aayy}{bb}$ la quale col segno positivo sarà all'iperbola, col negativo all'ellissi prese le assisse dal centro. Dunq. differenziando sarà $zdz = \pm\frac{aay\,dy}{bb}$, e di nuovo differenziando, posta costante dy se così piace, sarà $zddz+dz^2 = \pm\frac{aady^2}{bb}$, cioè $ddz = \pm\frac{aady^2-bbdz^2}{bbz}$; ma $dy^2 = \frac{b^4zzdz^2}{a^4yy}$, onde $ddz = \pm\frac{b^4zzdz^2}{aa} - \frac{bbaayydz^2}{bbyyz}$. Presa dunq. la formula, che a questa supposizione conviene cioè $\frac{f}{ss} = \frac{dy\,ddz\sqrt{zz+yy}}{\overline{ydz-zdy}^3}$, si sostituisca in luogo di dy il suo valore $\frac{bbzdz}{aay}$ dato per l'equazione della curva, ed avremo $\frac{f}{ss} = \pm\frac{bbzdz\,ddz\sqrt{zz+yy}\times a^4yy}{\overline{aayydz\mp bbzzdz}^3}$, istessamente si sostituisca il valore di ddz, e sarà $\frac{f}{ss} = \pm\frac{aadz\sqrt{zz+yy}\times\pm b^4zz\,dz^2 - aabbyydz^2}{\overline{aayydz \mp bbzzdz}^3}$; ma $aayy = \pm bbzz \mp aabb$, dunque $\frac{f}{ss} =$

$$\pm\frac{aadz\sqrt{zz+yy}\times\pm b^4zzdz^2\mp b^4zzdz^2\pm aab^4dz^2}{\overline{\pm bbzzdz\mp aabbdz\mp bbzzdz}^3}$$

cioè

cioè finalm.te $\frac{f}{ss} = \mp \sqrt{\frac{zz+yy}{aabb}}$. La forza centrale proporzionale alla distanza dal centro.

Il segno negativo nell'espressione delle forze conviene all'iperbola, come facilm.te si conosce dal ...colo, il che vol dire, che nell'iperbola qdo il centro della curva sia pure il centro delle forze, la forza sarà centrifuga in luogo di essere centripeta. E di fatti sia (Fig.a 49.a) l'iperbola ABM, il centro I la tangente DBC, il corpo posto in B anderebbe p. la tangente BC, acciò dunq. descriva la curva bisognerà, che sia spinto altresì da I verso O com'è manifesto.

Esempio 5.°

Sia la medesima equazione alle sezioni coniche, e cer... la forza centrale col mezzo delle formule del p.o Probl.a dunq. l'equazione delle sezioni coniche si sà essere $a \pm \frac{cv}{b} = \sqrt{vv+yy}$. Questa dunq. giacche è riferita all'asse, bisognerà riferirla al foco per valersi delle formule del sud.o p.o probl.a Riferita al foco si trova essere la seguente $dz = \pm \frac{badx}{\sqrt{ccxx-bbxx\pm2abbx-aabb}}$, intendendo per dz l'elemento dell'ordinata ch'è arco di cerchio. Facciamo per maggior comodo $\sqrt{ccxx-bbxx+2abbx-aabb}=m$, e però sarà $dz = \pm \frac{abdx}{m}$. Si prenda se piace, per costante la flussione dz; dunq. differenziando, sarà $ddx = \frac{dxdm}{m}$, perche $ddz=0$. Assumo dunq. la formula di dz costante nel p.o probl.a $\frac{f}{ss} = \frac{ds^2 - xddx}{x^3dz^2}$, cioe $\frac{f}{ss} = \frac{dx^2+dz^2-xddx}{x^3\,dz^2}$. Ma per l'equazione della curva sarà $dz^2 = \frac{aabbdx^2}{mm}$, ed è $ddx = \frac{dxdm}{m}$, adunq. sostituendo avremo $\frac{f}{ss} = \frac{mmdx^2+aabbdx^2-mxdxdm}{aabb\,x^3\,dx^2}$. Ma $mm = ccxx-bbxx+2abbx-aabb$, ed in consegu... $mdm = ccxdx-bbxdx+abbdx$. Fatte dunq. queste sostituzioni troveremo finalm.te $\frac{f}{ss} = \frac{1}{axx}$, cioe la forza centrale nella ragione duplicata inversa delle distanze dal centro d'esse forze.

Esempio 6.°

Avendo di nuovo l'equazione all'Ellissi, o Iperbola come segue $vv-aa=\pm\frac{aayy}{bb}$; questa riferendola al centro sarà $dz = \pm \frac{abdx}{\sqrt{bbx^2\pm x^4\mp aaxx-aabb}}$.

Facciamo

Facciamo per maggior comodo $\sqrt{bbxx \pm x^4 \mp aaxx - aabb} = m$, onde l'equazione sia $dz = \mp \frac{abdx}{m}$. Avendo la formula del corollario 7° Problema primo $\frac{fdx}{ss} = \frac{d\rho}{\rho^3}$. Del corollario primo $\rho ds = xdz$, ossia $\rho\sqrt{dx^2+dz^2} = xdz$, ed in luogo di dz sostituendo il valore $\mp \frac{abdx}{m}$ dato per l'equazione, sarà $\rho = \mp \frac{abdx}{\sqrt{mm+aabb}}$, e $d\rho = \mp \frac{abdx\sqrt{mm+aabb} \pm abxmdm}{\overline{mm+aabb}^{\frac{3}{2}}}$ si sostituiscano questi valori in luogo di ρ, e $d\rho$ nella formula e sarà $\frac{fdx}{ss} = \mp \frac{abdx\sqrt{mm+aabb} \pm abxmdm}{\mp a^3b^3x^3}$. Ma $mm = bbxx \pm x^4 \mp aaxx - aabb$, e però $mdm = bbxdx \pm 2x^3dx \mp aaxdx$, adunque fatte le sostituzioni, sarà finalmente $\frac{f}{ss} = \mp \frac{x}{aabb}$, come segue

Esempio 7°.

Sia il circolo ACH (Fig.ª 50ª) e sia AH = a, AG = r, GC = y, e le forze centrali dirette al punto A. L'equazione differenziale del circolo riferito al punto A sarà $dz = \frac{xdx}{\sqrt{aa-xx}}$, chiamando AC = x, e Ce = dz. Suppongo costante dz, dunque sarà $ddx = -\frac{aadx^2}{aax-x^3}$, e $ds^2 = \frac{aadx^2}{aa-xx}$. Avendo dunque la formula $\frac{f}{ss} = \frac{ds^2 - xddx}{x^3dz^2}$ che corrisponde alla flussione costante dz; si sostituisca in luogo di ddx, ds^2, e dz^2 i suoi valori, ed avremo $\frac{f}{ss} = \frac{aadx^2 + aadx^2}{(aa-xx) \times x^3 \times xxdx^2}$ cioè $\frac{f}{ss} = \frac{2aa}{x^5}$, la forza reciprocamente proporzionale alla quinta potestà della distanza dal centro delle forze.

Esempio 8°.

Supponiamo le direzioni della forza centrale parallele fra di loro, ossia convergenti ad un centro infinitamente lontano. Si muova il grave in virtù della forza centrale nella parabola ACC (Fig.ª [illegible]) la di cui equazione sia $az - zz = bx$, posta AB = z, BF = x, AF = $\frac{1}{2}a$, il parametro = b. Prese le differenze sarà $adz - 2zdz = bdx$, e di nuovo differenziando, posta costante dx, $addz - 2zddz - 2dz^2 = 0$, e però $ddz = \frac{2dz^2}{a-2z}$. Presa dunque la formula del problema 3° la di cui dy è l'istessa che qui la dx, ella è $\frac{f}{ss} = \frac{dxddz}{dz^3}$, supposta dx costante. Sostituendo il valor di

ddz, sarà $\frac{f}{ss} = \frac{2dx}{a-2z)dz}$, ma per l'equazione della curva, $dx = \frac{adz - zzdz}{b}$; dunque $\frac{f}{ss} = \frac{2}{b}$, cioè la forza costante.

Esempio 9°

Sia generalm.te l'equazione $z^m = \pm x$, che esprime tutte le parabole, e tutte le iperbole agli assintoti. Differenziando sarà $mz^{m-1}dz = \pm$, e di nuovo differenziando, presa costante dz, sarà $\overline{mm-m} \times z^{m-2}$ $dz^2 = \pm ddx$. Si veda dunque la formula ch'è questa supposizione ne corrisponde $\frac{f}{ss} = \frac{-ddx}{dz^2}$, e fatta la sostituzione, sarà $\frac{f}{ss} = \mp mm \pm m \cdot z^{m-2}$.

Coroll.° p.°

Sia $m=1$, nel qual caso la curva diviene linea retta, sarà nullo il coefficiente dell'omogeneo di comparazione, e pertanto $\frac{f}{ss} = 0$.

Coroll.° 2.° Fig.a 32.a

Sia $m=2$ sarà $\frac{f}{ss} = \mp 2$, cioè la forza costante, e negativa quando sia l'equazione $zz = x$ alla parabola AOH, il che significa che la forza vi sarà centripeta, ma centrifuga, costante, e positiva q.do sia $zz = -x$ alla parabola ARD.

Coroll.° 3.°

Sia $m=-1$, onde la data equazione sia all'iperbola fragli assintoti. Sostituendo sarà $\frac{f}{ss} = \mp 2z^{-3}$, cioè la forza proporzionale reciprocam.te ai cubi delle assisse nell'assintoto AB; e sarà positiva, cioè centripeta per l'iperbola tra gli assintoti AB, AC; negativa, cioè centrifuga per l'iperbola tra gli assintoti AB, AM.

Coroll.° 4.°

Sia $m = \frac{1}{2}$, e l'equazione $z = xx$, la quale esprimerà la parabola $DQAQH$ riferita all'asse AB. Sostituendo sarà $\frac{f}{ss} = \mp \frac{1}{4x^3}$, cioè la forza proporzionale reciprocam.te a' cubi delle ordinate, e positiva, ossia centripeta nel braccio AH, negativa, ossia centrifuga nel braccio AD.

Scolio

Poste le soprascritte formule del problema diretto delle forze centrali, non sarà difficile passare alla soluzione del problema inverso. Per ciò fare, basta avere in pronto i metodi di

ridurre

ridurre alle prime differenze le equazioni che contengono le differenziali

Sia dunq:

Problema 4°

Data qualsivoglia modo per la distanza dal centro la forza centrale ritrovare l'equazione della curva riferita al foco, che nelle date leggi di forze si descrive dal mobile.

Si prenda quella che più si vuole delle formule differenzio-differenziali ritrovate nel p.° probl.ª Sia dunq. l'equazione in cui nessuna flussione è stata presa costante, $\frac{f}{gg} = \frac{\partial x \partial z \partial s^2 + x \partial s^2 \partial\partial z - x \partial z \partial s \partial\partial s}{x^3 \partial x \partial z^3}$ ond'è in nostro arbitrio di fissar quella costante, che si vuole, e sia ∂z; dunq. sarà nullo il termine in cui entra $\partial\partial z$, e la formula verrà ad essere $\frac{f}{gg} = \frac{\partial x \partial z \partial s^2 - x \partial z \partial s \partial\partial s}{x^3 \partial x \partial z^3}$. Per separare le indeterminate prendo l'equazione sussidiaria $\partial s = t \partial z$, t è una nuova incognita, differenziando $\partial\partial s = \partial t \partial z$, per essere ∂z costante. Sostituiti nella formula questi valori, sarà $\frac{f}{gg} = \frac{tt \partial x - x t \partial t}{x^3 \partial x}$, e moltiplicando per 2, e trasponendo i termini sarà $-\frac{2 f \partial x}{gg} = \frac{2 x t \partial t - 2 tt \partial x}{x^3}$, ed integrando $-\frac{2}{gg}\int f \partial x = \frac{tt}{xx} -$ ma per l'equazione sussidiaria, $t = \frac{\partial s}{\partial z}$, e $tt = \frac{\partial s^2}{\partial z^2} = \frac{\partial x^2 + \partial z^2}{\partial z^2}$ rimesso dunq. in luogo di t il suo valore avremo $-\frac{2 xx \partial z^2}{gg}\int f \partial x = \partial x^2 + \partial z^2 - n xx \partial z^2$, ossia finalm.te $\partial z = \frac{g \partial x}{\sqrt{n gg xx - gg - 2xx\int f \partial x}}$, equazione cercata.

Se avessimo preso per costante il tempo cioè $x \partial z$, sarebbe il differenziale $x \partial\partial z + \partial x \partial z = 0$, onde nella formula differenzio-differenziale svanirebbero i due primi termini dell'omogeneo di comparazione, sicche sarebbe ella $\frac{f}{gg} = \frac{-\partial s \partial\partial s}{xx \partial x \partial z^2}$. Prendo l'equazione sussidiaria $\partial s = t x \partial z$ differenziando $\partial\partial s = x \partial t \partial z$ perchè $x \partial\partial z + \partial z \partial x = 0$. Sostituiti questi valori sarà $\frac{f}{gg} = -\frac{t \partial t}{\partial x}$ ed integrando $\frac{2}{gg}\int f \partial x = -tt + n$. Ma $t = \frac{\partial s}{x \partial z}$, e $tt = \frac{\partial s^2}{xx \partial z^2} = \frac{\partial x^2 + \partial z^2}{xx \partial z^2}$, dunque $\frac{2}{gg}\int f \partial x = -\frac{\partial x^2 - \partial z^2}{xx \partial z^2} + n$, e finalm.te

$$\partial z = \frac{g \partial x}{\sqrt{n gg xx - gg - 2xx\int f \partial x}}$$

. Anco senza presupporre alcuna differenziale costante si arriverà alla stessa equazione

Sia di nuovo la formola $\frac{f}{gg} = \frac{\partial x\partial z\partial s^2 + x\partial s^2\partial\partial z - x\partial z\partial s\partial\partial s}{x^3\partial x\partial z^3}$. Si moltiplichi l'uno, e l'altro membro per $2x\partial z$, sarà $\frac{2fx\partial z}{gg} = \frac{2x\partial x\partial z^2\partial s^2 + 2xx\partial s^2\partial z\partial\partial z - 2xx\partial z^2\partial s\partial\partial s}{x^3\partial x\partial z^3}$, cioè

$$\frac{2f\partial x}{gg} = \frac{2x\partial x\partial z^2\partial s^2 + 2xx\partial s^2\partial z\partial\partial z - 2xx\partial z^2\partial s\partial\partial s}{x^4\partial z^4}.$$

ma l'integrale dell'omogeneo si sà essere $-\frac{\partial s^2}{xx\partial z^2} + n$, dunq. $\frac{2}{gg}\int f\partial x = -\frac{\partial x^2 - \partial z^2}{xx\partial z^2} + n$ &.

Molto più speditamente s'ottiene lo stesso colla formola del corollº 7º $\frac{f\partial x}{gg} = \frac{\partial \rho}{\rho^3}$, la quale integrata sarà $\int\frac{f\partial x}{gg} = \frac{-1}{2\rho\rho} + n$;

ma pel corollº pº $\rho = \frac{x\partial z}{\partial s}$; dunq. $\frac{2}{gg}\int f\partial x = \frac{-\partial x^2 - \partial z^2}{xx\partial z^2} + n$ & -

Scolio

Se la forza centrale sarà data in tal modo per x, che l'omogeneo di comparazione diviso per x sia riducibile all'espressione di un arco di circolo, la curva sarà sempre algebraica, e si potrà avere l'equazione alla cartesiana. In molte, e varie maniere si ponno ridurre le menzionate formole differenzio-differenziali a differenziali primi; ma ciò appartiene a metodi analitici, e per lo nostro instituto basta il detto sinquì, onde passiamo a far uso della equazione ritrovata.

Esempio pº

Sia la forza centrale proporzionale reciprocamte a cubi della distanza dal centro, si cerca la curva, che descriverà il corpo in questa ipotesi. Sarà dunq. $f = \frac{mm}{x^3}$. quindi questa l'equazione canonica $\partial z = \frac{g\partial x}{\sqrt{ngg xx - gg - 2xx\int f\partial x}}$, e sostituito il valore della forza f, averemo $\partial z = \frac{g\partial x}{\sqrt{nggxx - gg - 2xx\int \frac{mm\partial x}{x^3}}}$

fatto attualmte l'integrazione indicata, essendo $\int\frac{mm\partial x}{x^3} = -\frac{mm}{2xx} + b$ sarà $\partial z = \frac{g\partial x}{\sqrt{nggxx - gg + mm - 2bxx}}$.

Se sarà $mm = gg$, la curva sarà la spirale iperbolica, e la medesima

medesima, che abbiamo veduto di sopra, se sia di più $\frac{g}{\sqrt{n gg - 2b}} = a$, cioè $n = \frac{2}{aa}$, $b - \frac{gg}{aa}$. Se sarà $ngg = 2b$, la curva sarà la logaritmica spirale e la medesima veduta di sopra, se sia di più $mm = \frac{bb, gg + aagg}{aa}$ negli altri casi saranno altre curve.

Esempio 2°.

Sia la forza reciprocamente proporzionale alla quinta potestà della distanza dal centro, cioè $f = \frac{2aagg}{x^5}$. Sarà $\int f dx = -\frac{aagg}{2x^4} + 1$ e fatta la sostituzione nella equazione canonica avremo $dz = \frac{g dx}{\sqrt{n gg xx - gg + \frac{aagg}{xx} - 2b xx}}$, cioè riducendo al comune denominatore $dz = \frac{g x dx}{\sqrt{n gg x^4 - gg xx + aagg - 2b x^4}}$ equazione della curva quesita. Quando sia $ngg = 2b$, sarà $dz = \frac{x dx}{\sqrt{aa - xx}}$ equazione al circolo, come sopra.

Esempio 3°.

Sia la forza centrale proporzionale reciprocamente a quadrati della distanza dal centro, cioè $f = \frac{mm}{xx}$. Sostituendo questo valore nella formula canonica sarà $dz = \frac{g dx}{\sqrt{n gg xx - gg - 2xx \int \frac{mm dx}{xx}}}$, e fatta l'integrazione indicata, $dz = \frac{g dx}{\sqrt{n gg xx - gg + 2mm x - 2b xx}}$ la quale equazione sappiamo essere alle sezioni coniche, non essendo diversa da quella dell'esempio 5° del probl.ª p°, se non nelle costanti, anzi sarebbe la stessa se avessimo preso $ngg - 2b = cc - bb$, $mm = abb$, $g = ab$. Riguardo alli segni ambigui $\pm$ che non ha questa equazione, basta considerare che dz può essere positiva, e negativa secondo, che le ascisse z si prendono dalla parte de' positivi o negativi rispetto al foco.

Esempio 4°.

Sia la forza centrale $f = \mp mm x$, cioè proporzionale alla distanza dal centro. Sostituito in luogo di f il suo valore nella equazione canonica sarà essa $dz = \frac{g dx}{\sqrt{n gg xx - gg - 2xx \int \mp mm x}}$

e fatta attualmente l'integrazione indicata, sarà

$dz =$

$$dz = \frac{gdx}{\sqrt{nggxx - ss \pm mmx^4 - 2bxx}}$$, equazione all'Ellissi, o iperbola riferite al centro, e le stesse dell'esempio 6.° del problema preced., se sia $g = ab$, $mm = 1$, $n = \frac{1}{aa}$, $2b = \pm aa$.

Problema 5.°

Data in qualsivoglia modo per la distanza del centro delle sollecitazioni la forza, ritrovare l'equazione della curva riferita all'asse, che nella data legge di forze si descrive dal mobile. Si prenda quella, che più si vuole delle formule del probl.ª 2.°, e sia per esempio quella in cui nessuna differenziale è stata assunta costante, cioè $\frac{f}{gg} = \frac{ds^2 ddz - dzdsdds\sqrt{zz+yy}}{dy \times \overline{ydz - zdy}^3}$, e ponendo l'elemento del tempo dt in luogo di $\frac{ydz - zdy}{g}$, che gli è eguale, come pure $dz^2 + dy^2$ in luogo di ds^2, e $dzddz + dyddy$ in luogo di $dsdds$, sarà ella $fgdt^3 = \overline{dyddz - dzddy}\sqrt{zz+yy}$. Sia costante il tempo $gdt = ydz - zdy$; dunq. $yddz - zddy = 0$, e $ddy = \frac{yddz}{z}$, e però $fgdt^3 = \frac{zdyddz - ydzddz}{z}\sqrt{zz+yy}$, ossia, fatta $\sqrt{zz+yy} = s$, $fgdt^3 = \overline{ydz - zdy} \times -sddz$, cioè $fgdt^2 = -\frac{sddz}{z}$. Per ridurre questa equazione alle prime differenze, prendo l'equazione sussidiaria $\rho dt = zdz + ydy$ (ρ è una nuova incognita) e passando alle sec.de differenze, sarà $d\rho dt = zddz + yddy + dz^2 + dy^2$, nell'ipotesi di dt costante, sarà $d\rho dt = zddz + yddy + dz^2 + dy^2$; ma $ddy = \frac{yddz}{z}$, dunq. $\frac{zzddz + yyddz}{z} = d\rho dt - dz^2 - dy^2$, ossia, perchè $zz + yy = ss$, $\frac{ssddz}{z} = d\rho dt - dz^2 - dy^2$. Ma poi. $\frac{sddz}{z} = -fgdt^2$, dunq. A $- sfgdt^2 = d\rho dt - dz^2 - dy^2$. Ora poi: che $zdz + ydy = sds$, e $ydz - zdy = gdt$, sarà $\overline{zdz + ydy}^2 + \overline{ydz - zdy}^2 = ssds^2 + ggdt^2$, e però $dz^2 + dy^2 = \frac{ssds^2 + ggdt^2}{ss}$. Dunque sostituito questo valore nella equazione A, sarà $- sfgdt^2 = d\rho dt - \frac{ssds^2 - ggdt^2}{ss}$; ma $dt = \frac{sds}{\rho}$, (per essere $\rho dt = zdz + ydy$, ed $sds = zdz + ydy$) dunq. sostituito questo valore di dt, sarà $- \frac{fgs^3 ds^2}{\rho\rho} = \frac{sdsd\rho}{\rho} - ds^2 - \frac{ggds^2}{\rho\rho}$, cioè $\frac{ggds}{s^3} - fgds = \frac{\rho d\rho - \rho\rho ds}{s^3}$, ed integrando $- \frac{gg}{2ss} - \int fgds = \frac{\rho\rho}{2ss} - \frac{nn}{2}$. Ora per fissare la costante

la costante aggiunta n, si noti, che nel principio del moto la distanza s è data, e sia per esempio $=a$, onde sarà il termine $\int f ds = 0$, e però $-\frac{gg}{2aa} = \frac{\rho\rho}{2ai} - \frac{nn}{2}$, cioè $nn = \rho\rho + \frac{gg}{aa}$; ma nel principio del moto sono tanto dt, come dz, e $dy = 0$, dunque $\rho = 0$, onde $nn = \frac{gg}{aa}$; sicche $-\frac{gg}{2ss} - \int fg ds = \frac{\rho\rho}{2ss} - \frac{gg}{2aa}$, e quindi $\rho = \frac{\sqrt{ggss - aagg - 2aass\int fg ds}}{a}$. Sicche dunq. ρ sarà data per s, e le costanti. Ciò posto andiamo avanti, e giacche $\frac{sds}{\rho} = dt = \frac{ydz - zdy}{g}$, pongasi $\frac{z}{y} = \frac{q}{h}$, dunq. $ydz - zdy = yy\frac{dq}{h} = \frac{gsds}{\rho}$. Ma $zz + yy = ss$, e $zz = \frac{yyqq}{hh}$; dunq. $ss = \frac{yyqq+hh}{hh}$ e però $yy = \frac{hhss}{hh+qq}$. Nell'equazione $yy\frac{dq}{h} = \frac{gsds}{\rho}$, si sostituisca il valore di yy, ed avremo $\frac{hss\, q}{hh+qq} = \frac{gsds}{\rho}$, cioè $\frac{hdq}{hh+qq} = \frac{gds}{s\rho}$, e finalm.te posto il valore di ρ, sarà $\frac{hdq}{hh+qq} =$

$$\frac{agds}{s\sqrt{ggss - aagg - 2aass\int fg ds}}$$

equazione necessar., in cui sono separate le incognite.

Da ciò si scorge, che sendo il primo membro l'espressione d'un arco circolare, ogni volta che la forza centrale sarà in tal modo data per la distanza, che l'omogeneo di comparazione possa elevarsi ridursi ad espressione d'arco circolare, i quali archi si rispondano come numero a numero, le curve saranno algebriche, negli altri casi trascendenti.

Esempio

Sia la forza centrale reciprocam.te proporzionale a quadrati delle distanze dal centro delle sollecitazioni, cioè $f = \frac{m}{ass}$, onde $\int fg ds = -\frac{mg}{as} + l$ (l è una costante aggiunta la quale, perche nel principio del moto è $\int fg ds = 0$, ed $s = a$, si trova essere $l = \frac{mg}{aa}$). Sostituito questo valore nella equazione canonica $\frac{hdq}{hh+qq} = \frac{agds}{s\sqrt{ggss - aagg - 2aass\int fg ds}}$, sarà $\frac{hdq}{hh+qq}$

$$= \frac{agds}{s\sqrt{ggss - aagg + 2amgs - 2alss}}.$$

Si faccia $gg - 2al = bg$, ed

e $ds = \frac{ag}{u}$, onde $ds = -\frac{ag\,du}{uu}$, sostituendo sarà $\frac{h\,dq}{hh+qq} = \frac{-du}{\sqrt{bg-uu+2mu}}$. Sia inoltre $m-u=v$, e sostituendo sarà finalmente $\frac{h\,dq}{hh+qq} = \frac{dv}{\sqrt{bg+mm-vv}}$. Ma qui si osservi, che $\frac{hh\,dq}{hh+qq}$, è l'espressione d'un arco colla tangente q, il di cui seno retto è $= \frac{hq}{\sqrt{hh+qq}}$, onde posta $\frac{hq}{\sqrt{hh+qq}} = t$, sarà $\frac{h\,dt}{\sqrt{hh+tt}}$, l'espressione del medesimo arco, e però $\frac{h\,dq}{hh+qq} = \frac{dt}{\sqrt{hh-tt}} = \frac{dv}{\sqrt{bg+mm-vv}}$. Quindi poiche h è quantità arbitraria, fatta essa $= \sqrt{bg+mm}$, sarà t, cioè $\frac{hq}{\sqrt{hh+qq}} = v$; ma $v = m-u = m - \frac{ag}{s}$, così pure $q = \frac{hz}{y}$; dunq. $\frac{hz}{\sqrt{zz+yy}} = v = m - \frac{ag}{s}$, ma $s = \sqrt{zz+yy}$, dunq. $\pm hz + ag = m\sqrt{zz+yy}$, equazione alle sezioni coniche, cioè alla parabola, se sia $h=m$ il di cui parametro $= \frac{2ag}{m}$, distanza del foco dal vertice $= \frac{ag}{2m}$. Sarà all'ellissi, se sia m maggiore di h il di cui asse trasverso è $= \frac{2agm}{mm-hh}$, il coniugato $= \frac{2ag}{\sqrt{mm-hh}}$, distanza del foco, ossia umbilico dal vertice $= \frac{ag}{m+h}$; sarà all'iperbola, se sia m minore di h il di cui asse trasverso $= \frac{2agm}{hh-mm}$, coniugato $= \frac{2ag}{\sqrt{hh-mm}}$, distanza dall'umbilico dal vertice $= \frac{ag}{m+h}$. Ora vendo la quantità $h = \sqrt{bg+mm}$; $b = \frac{gg-2ag}{g}$, $f = \frac{nq}{aa}$, sarà h data per le costanti m, a, g. Ma pel Coroll.° 2.° Probl.ª p.° Cap.° 2.° la quantità g è eguale al seno della direzione del progetto moltiplicato per la velocità della projezione, ne viene, che data la velocità l'angolo, e la distanza del progetto dal centro delle forze, è dato il genere, e la specie della trajettoria.

Ma qui bisogna osservare, che acciò il progetto descriva la parabola, bisognerà che abbia velocità iniziale tale, che avrebbe acquistato cadendo da altezza infinita. Per descrivere l'iperbola bisognerà che sia caduto da altezza più che infinita, in altro modo descriverà l'ellissi. E di fatti nella parabola deve essere $h=m$ cioè $g = \frac{2m}{a}$. cioè pel citato Coroll.° la velocità iniziale

=

$= \frac{2m}{a}$ moltiplicato nel seno della direzione e però il quadrato della velocità iniziale eguale al doppio di un rettangolo costante. Ciò posto, essendo la forza $f = \frac{m}{ass}$, sarà la scala d'esse un' iperboloide, e sia (Fig.ª 53ª) essa BCF ora gli assintoti CA, AO ed A il centro delle forze. È già nota la proprietà di questa curva, che un rettangolo qualunq. ora l'assissa per esempio AB e la corrispondente ordinata BE è eguale all'area CBCD stessa superiorm.te all'infinito; ma si sa pure, che il quadrato della velocità in B è doppio della corrispondente area CBCD, dunq. acciò questo quadrato sia eguale al rettangolo costante ABC, cioè acciò sia $g = \frac{2m}{a}$, bisogna, che l'area sia infinita ed il corpo caduto da altezza infinita. Se sarà g maggiore di $\frac{2m}{a}$, cioè nel caso dell'iperbola bisognerà che l'area sia più che infinita, cioè più che infinita l'altezza della caduta. Quando poi sia finita l'altezza della caduta, allora sarà g minore di $2m$ e avrò il caso dell'ellisse.

Nel caso particolare delle forze reciprocamente proporzionali a' quadrati delle distanze, più facilm.te si potrà avere la soluzione. E di fatti ripresa la formula $fgdt^2 = -\frac{sddz}{z}$, sia l'equazione sussidiaria $dz = pdt$; differenziando $ddz = dpdt$ (supposta dt costante), dunq. sostituendo $fgdt = -\frac{sdp}{z}$; ma $gdt = ydz - zdy$, e $y = \sqrt{ss-zz}$, onde $dy = \frac{sds - zdz}{\sqrt{ss-zz}}$, dunque $gdt = \frac{ssdz - zsds}{\sqrt{ss-zz}}$. Fatta pertanto questa sostituzione sarà l'equazione

l'equazione $-\frac{sdp}{z} = f \times \frac{ssdz - zsds}{\sqrt{ss-zz}}$, cioè $-\frac{dp}{z} = f \times \frac{sdz - zds}{\sqrt{ss-zz}}$. Sia $\frac{hz}{s} = q$, $\frac{hsdz - hzds}{ss} = dq$, fatta la sostituzione avremo $-dp = \frac{fssqdq}{h\sqrt{hh-qq}}$. Da ciò si vede che se sia $f = \frac{m}{ss}$, avremo $-dp = \frac{mqdq}{h\sqrt{hh-qq}}$, ed integrando $p = m\frac{\sqrt{hh-qq}}{h}$. Ripiglio l'equazione $\frac{dz}{dq}$

$= p$

$$= a\,dz = a \times \frac{ss\,dz - zs\,ds}{g\sqrt{ss - zz}} = \frac{a\,ss\,dq}{g\sqrt{hh - qq}} =$$

$\frac{ahhzz\,dq}{ggg\sqrt{hh-qq}}$ e finalmente posto il valore, di a ritrovato.

$\frac{dz}{zz} = \frac{mh\,dq}{ggg}$ e integrando $-\frac{1}{z} \mp b = \frac{-mh}{gq}$, cioè g

$\pm b\,g\,z = m\sqrt{zz+yy}$, equazione delle sezioni coniche.

Problema 6°

Data la forza centrale costante le di cui direzioni vengono paral-lele, o sia convergenti ad un centro infinitamente lontano, trovare l'equazione della curva, che nella data legge di forze si descrive dal mobile.

Prendo la formola dal Probl.ª 5° $\frac{f}{gg} = ds^2\frac{ddz - dz\,ds\,dds}{dy\,dz^3}$

in cui nessuna differenziale è costante; pertanto si fissi quella costante ne' miei usi e sia dz, onde $ddz = 0$ e $ds\,dds = dy\,ddy$, e la formola si muterà nella seguente $\frac{f}{gg} = -\frac{ddy}{dz^2}$. Prendo l'equazione sussidiaria $dy = p\,dz$, e $ddy = dp\,dz$, quindi fatte le sostituzioni, la formola avrà $\frac{f}{gg} = -\frac{dp}{dz}$ ed integrando $\frac{fz}{gg} = -p + n$, ma nel principio del moto $y = 0$, $z = 0$, e sarà $p = 0$, ed $n = 0$, dunque $\frac{fz}{gg} = -p$ e sostituito il valore di p $\frac{fz\,dz}{gg} = -dy$, e di nuovo integrando $zz = -\frac{2ggy}{f}$, equazione della parabola Apolloniana.

Se dunque (fig.ª 54ª) viene il grave nella direzione AC dal punto A, e sia la velocità $AC = g$, $AB = 0$ il seno della pro-

gente AP = z è la similitudine de' triangoli APC, AB.., sarà $z = \frac{by}{ag}$, ossia AC = q. Alla (Coroll° n° 7, eve° 1°) la quantità q è uguale alla velocità iniziale moltiplicata nella BD, cioè, chiamata m essa velocità, $q = \frac{bm}{a}$. Dirò poi la quantità a, per la legge degli omogenei. Dunque sostituendo questi valori nella equazione sarà $qq = -\frac{2mmy}{f}$, parabola apolloniana col parametro = $\frac{2mm}{f}$, asse AC = q, ordinata CE = y negativa, AD diametro.

Coroll°. 1°

Se l'angolo BAD sarà nullo cioè nulla la inclinazione, le due AC, CE coincideranno e la parabola si muterà in una retta verticale. E se l'angolo BAD sarà retto, allora la parabola averà AD per asse, A il vertice, ed AC tangente nel vertice.

Coroll°. 2°

Sia s lo spazio, per cui naturalmente cadendo dalla quiete il mobile, averebbe acquistato la velocità detta = m; poichè sappiamo essere ne' mobili naturalmente accelerati dalla quiete $mm = 2fs$, fatta questa sostituzione nella nostra equazione, averemo $qq = -\frac{4fsy}{f}$, cioè il parametro = 4s.

Coroll°. 3°

Sia AC = q lo spazio, che in un dato tempo trapasserebbe il mobile di moto uniforme con la data velocità, sarà CE = y lo spazio corso nel medesimo tempo di moto accelerato, e perchè abbiamo $qq = -4sy$, staranno in proporzione [illegible], la linea di [illegible] AC, e la [illegible] CE.

Corollº 4. Fig.ª 55.ª

Sia AM = s = alla quarta parte del parametro e sia ML ... perpendicolare ad HQ, LA ad essa parallela, per la proprietà della parabola saranno AM, HQ, LR eguali alla distanza de' punti A, LR, dal foco della parabola. Quindi è che descritto col centro A, raggio AM, il circolo MTV, sarà egli il luogo de' fuochi di tutte le parabole descritte con la velocità di projezione eguale alla acquistata con la caduta per MA nelle infinite diverse direzioni AC dei projetti fatti: perciò fatto l'angolo CAK = CAM il punto K sarà il foco della parabola, KH parallela ad AM sarà l'asse, Q il vertice, presa KQ = ¼ KH, e per conseguenza il parametro = 4 KQ.

Corollº 5º

Si conduca QS parallela ad HM; per la proprietà della parabola la linea QS è divisa, per metà in O dalla tangente AC, e la retta KM condotta dal foco passerà nel punto O e l'angolo AOM sarà retto ... il circolo del diametro MA passerà pel punto O, e però la AS orizontale, che si chiama l'amplitudine, sarà = 4 QO = 4OS; OS è uguale al seno retto del doppio angolo d'inclinazione dunque le amplitudini orizontali sono tra di loro come i seni del doppio angolo d'inclinazione. Quindi se AS = 4OS, posto l'angolo d'inclinazione MAC semiretto sarà SO la massima ordinata nel circolo, ed AS la massima amplitudine orizontale, ed in conseguenza maggiore o minore facendosi l'angolo d'inclinazione, si avrà sempre minore l'ordinata SO, e pertanto minore l'amplitudine AS in modo, che quando esso angolo sia nullo, sarà nulla l'amplitudine, ed il projetto anderà per la verticale. E poiché a distanza uguali presi dall'una e l'altra parte del centro del circolo MSA corrispondono ordinate uguali, ed angoli di uguale distanza dal semiretto, ne viene, che ad una medesima amplitudine, che non sia la massima, due angoli d'inclinazione corrispondono uno de' quali sia uno maggiore, l'altro minore del semiretto con differenze uguali. Fig.ª 55.ª

Corr. 1º.

Coroll.° 6°.

La parabola CES sia la descritta dal progetto nell'angolo d'inclinazione NAC minore del semiretto colla velocità acquistata cadendo per MA. Sia MAX l'angolo d'inclinazione di un altro progetto colla med.a velocità, e le differenze di essi angoli dal semiretto sieno uguali. Se adunque le amplitudini sono uguali, dovrà la parabola del secondo progetto passare nel punto S, quindi determinati, come abbiamo fatto di sopra, il foco, vertice, parametro di essa parabola si scorge, che quanto più è minore del semiretto l'angolo della inclinazione, si fanno ristrette o sia acute le parabole all'incontro sempre più aperte, quando l'angolo è maggiore del semiretto. Se l'angolo della inclinazione NAC è retto, il foco sarà in V ed il vertice in A, dove la linea della direzione tocca la parabola.

Dal già detto ora facilmente ponno risolversi i seguenti probl.mi

Probl.a 7°.

Data l'amplitudine orizontale del getto e l'angolo d'inclinazione ritrovare la velocità iniziale del mobile, e determinare la specie della parabola descritta.

Sia (fig.a 50.a) AC il seno tutto o sia il raggio = b, CM il seno retto della inclinazione = a, CA = c il seno di complemento, AS
fig. 50.a = h l'amplitudine orizontale. Si prenda $AB = \frac{h}{4}$ e condotta BO perpendicolare ad AC, dalla parabola il punto O deve essere (Probl. 5°, Coroll. 5°) nella circonferenza d'un circolo che passi per A, il cui diametro nella retta AN. Sia dunque esso diametro $AP = x$: per la similitudine de' triangoli CMA, OSA avremo $SA = \frac{ch}{4a}$, $SP = x - \frac{ch}{4a}$, ma per la proprietà del circolo, sarà $SO^2 = AS$

$\lambda\Delta B$, cioè $\frac{hh}{16} = \frac{4achx - cchh}{16aa}$, e però $x = \frac{h \times aa+cc}{4ac}$, ma $aa+cc = bb$ adunque $x = \frac{bbh}{4ac}$. Ora perchè $\frac{bb}{c}$ è la secante dell'angolo d'inclinazione sarà AB (x) la quarta proporzionale del seno retto, della secante dell'angolo, e della quarta parte della amplitudine. Ma la velocità iniziale è uguale a quella che il mobile averebbe acquistata di moto accelerato cadendo per la retta AB, ed il parametro del diametro AB, è quadruplo di essa AB, adunque è nota quella, e questo, ed in conseguenza si averà il foco, l'asse, il vertice &c e potrassi descrivere la parabola.

Corollº 1º.

Chiamato p il parametro averemo $p = \frac{bbh}{ac}$, e risolvendo in proporzione $p, h :: b, \frac{ac}{b}$, cioè $\frac{p}{2}, h :: b, \frac{2ac}{b}$; ma $\frac{2ac}{b}$ è uguale al seno del doppio angolo d'inclinazione adunque il semiparametro è alla amplitudine, come il seno tutto al seno del doppio angolo d'inclinazione. Quindi è, che se due corpi saranno spinti in diverse inclinazioni, ma con velocità uguale, essendo allora uguali i parametri, saranno le amplitudini, come i seni de doppi angoli d'inclinazione.

Corollº 2º.

E perchè come il seno retto al seno del doppio angolo d'inclinazione, così il semiparametro alla amplitudine, se l'angolo d'inclinazione sia semiretto, cioè grad. 45 il seno del doppio è allora uguale al seno tutto onde il semiparametro eguale alla amplitudine. Sarà adunque l'amplitudine massima nell'angolo semiretto, ed allora

il seno

il seno tutto è eguale al seno del doppio angolo d'inclinazione, se faremo come il seno tutto al seno dell'angolo doppio di un qualunque angolo d'inclinazione data, così la massima amplitudine al quarto proporzionale, sarà esso l'amplitudine competente al dato angolo, ritenuta la med.ª velocità.

Probl.ª 8.°

Data la velocità del progetto ritrovare l'amplitudine massima.

Sia la velocità tale, che il corpo in un minuto secondo possa scorrere di moto uniforme piedi 1000 di Parigi, e poiche nel med.° tempo scorrerebbe (Ugenio prop. 25 Orologio Oscillatorio parte 4.ª) di moto naturalmente accelerato piedi 15 $\frac{1}{12}$, il 3.° proporzionale del primo, e secondo spazio sarà il parametro, cioè 66298, e la metà 33149 sarà l'amplitudine, ove pure cognita l'amplitudine massima si cerca la velocità bisogna trovare il medio proporzionale tra il doppio dell'amplitudine e lo spazio, che in un minuto secondo si scorre di moto naturalmente accelerato, e sarà la velocità ricercata.

Fig.ª 57.ª

Probl.ª 9.°

Dato l'angolo d'inclinazione e l'amplitudine ritrovare la massima altezza a cui giugne il progetto. Fig.ª 57.ª

Sia AF = l'amplitudine e si conduca FE perpendicolare, e sia il seno dell'angolo d'inclinazione = a, il seno del complemento della detta inclinazione = b. Egli è manifesto, che la massima altezza sarà il vertice della parabola, e però divisa l'amplitudine AF

per

per metà in B, e fatta BCD perpendicolare, sarà essa l'asse, e C il vertice; quindi se faremo in proporzione, a : b :: AB ($\frac{1}{2}c$) : BD, sarà egli = $\frac{bc}{2a}$. Ma poiché AD è tangente, sarà per la proprietà della parabola DC = CB = $\frac{bc}{4a}$.

Problema 10.

Data l'amplitudine AC, ed il punto B (Fig.a 58) per cui passa la parabola ABC, si cerca l'angolo d'elevazione del progetto, la semita, e la velocità iniziale.

Dal punto B sia BD perpendicolare all'orizzonte, e sia z la quarta proporzionale di BD, AD, DC, sarà essa il parametro. Si divida AC per metà in E, e nella perpendicolare EF sia EG terza proporzionale di z, ed AE; sarà G il vertice della parabola, e presa G7 = GE per la proprietà della parabola, sarà A7 tangente nel punto A, e l'angolo 7AE la elevazione, ed EG + $\frac{1}{4}$ z la velocità del progetto. Essendo BD : AD :: DC ; z, sarà z DB = AD · DC, e però z il parametro della parabola, che passa per li punti B, e C. E poiché z, AE :: AE, EG, sarà G il vertice. Dunq. la parabola descritta col parametro z, e vertice G sarà la semita ricercata; EG + $\frac{1}{4}$ z la velocità; 7AE l'angolo di elevazione; quindi se faremo come AE, E7, così il raggio alla quarta proporzionale, ci darà essa la tangente dell' angolo quesito. Vale il medesimo discorso, se il punto B sarà di sotto dell' orizzontale AC.

Problema 11.a

Dato l'impeto, ossia la velocità del progetto, si cerca qual deve essere l'angolo d'inclinazione, acciocché il progetto passi per un dato punto posto fuori della orizzontale.

Sia (Fig.a 59) AB = a la caduta per cui il corpo abbia acquistata la data velocità. D il dato punto A il punto della [illegible] ove, onde sia AD = b, DH = c. Descritto sul [illegible]metro AB il [illegible] BEA, sia AG [illegible], GE = s, e l'angolo BAD [illegible] sarà dunq AH = 45 l'amplitudine

l'ampiezza $QR = 4s - b$, $BG = a - y$, e divisa AR egualmente in O, e condotta la perpendicolare OH, e le orizzontali $\frac{1}{2}$ GI, sarà OI l'asse, il di cui parametro sarà $= 4a - 4y$, ed AIK la semita. Ma per la proprietà della parabola sarà $AQ \times QR = QX \times 4a - 4y$, onde $s = \frac{ac - cy}{b} + \frac{1}{4}b$. Dunq. dal punto L, dove la retta AX taglia il circolo, condotta LB, si prenda $BV = \frac{1}{4}AQ = \frac{1}{4}b$, e sia VD parallela a BL. Se la retta VD taglia il circolo, il problema avrà due soluzioni, e le direzioni o progetto saranno AX, AD. Se lo tocca, sarà una sola, cioè la retta dal punto A al contatto. Se nè lo taglia, nè lo tocca, il problema è impossibile, e la data velocità sarà troppo picciola. I vertici delle parabole si avranno prendendo le BI, o DI eguali alla BG ossia $a - y$.

Dimostrazione

Poiche sono simili i triangoli XQA, BAL, ossia BGh, sarà b, c :: $BG(a-y)$ $Gh = \frac{ac - cy}{b}$. Ma $hD = BV = \frac{1}{4}b$, dunque $GD = s = \frac{ac - cy}{b} + \frac{1}{4}b$.

Problema ~~secondo~~ 3z.

Data la velocità del projetto si cerca la proporzione del tempo, che impiegherà il corpo spinto verticalmente al tempo per una semita parabolica qualunque sia la inclinazione.

Sia (Fig.a [illegible]) AF l'impeto del progetto, cioè lo spazio che può scorrere [illegible] la data velocità, ed ABC la semita parabolica nella direzione AG. Dico che il tempo della salita, e scesa per AF sarà al tempo per la semita ABC, come AF [illegible] G. [illegible] che il tempo da A in B è eguale al tempo da B in [illegible]. Ma [illegible] tempo da B in C è eguale al tempo da B in D di moto naturalmente accelerato, perche il moto progressivo orizzontale nulla impedisce il moto della [illegible]. Sarà [illegible] il tempo da A in C doppio del tempo da B in [illegible], ossia da E in A, perche supposta AG la direzione, e $EA = BD$. Ma il tempo della salita, e scesa per AF è doppio del tempo da F in A, dunque il tempo [illegible] salita, e scesa per AF sarà al tempo

al tempo per la parabola ABC, come il tempo per 7A, al tempo per CA, cioè con. $\sqrt{7A}$ alla $\sqrt{CA}$, cioè come 7A ad AG.

Corollo

Quindi è che i tempi per diverse direzioni AG, AH sono tra di loro come le corde AG, AH. Che se prenderemo A7 per seno tutto ossia raggio, sarà AG il seno dell'angolo A7G = angolo CAG e però sarà il tempo per la verticale al tempo per la parabola come il raggio al seno dell'elevazione, ed i tempi delle diverse elevazioni saranno tra loro come i seni delle elevazioni stesse.

Scolio

Unicamente per far vedere l'uso del metodo delle forze centrali si è sciolto il problema 6.° col metodo infinitesimale; per altro senza impegnarsi nelle quantità differenziali, molto facilmente si può sciorre colla sola algebra Cartesiana

Sia (Fig.a 6.a) spinto il corpo da A verso D colla velocità ch'avrebbe acquistata cadendo da B in A. Egli percorrerebbe in tempi eguali spazj eguali AC, CH, ma la gravità che lo porta al basso, farà che dopo il primo tempo sia in qualche punto fuori della AD, come in O, dopo il secondo tempo in M, e così successivamente dimodochè per le leggi de' moti uniformemente accelerati saranno negli spazj CO, HM tra di loro come i quadrati de' tempi. Quindi chiamata BA = s, il tempo per essa = t, AH = y, il tempo per essa = T, sarà 2s, y :: t, T; ora chiamata HM = x, e anco $\sqrt{s}$, $\sqrt{x}$ :: t, T, perchè il tempo per la caduta HM è eguale al tempo T per AH di moto uniforme, dunque sarà 2s, y :: $\sqrt{s}$, $\sqrt{x}$, cioè 4sx = yy, parabola come sopra.

Problema 13.°

Ritrovare il canone generale, che ci esprima tutti gli infiniti valori della sollecitazione centrale variabile tale, che le trajettorie descritte siano sempre curve algebraiche.

Sia (Fig.a 8.a) all'asse DA descritta una qualunque curva algebraica LHh, e sia DC = x, CH = y, AL = a, e Δ = alla sottangente

sottangente, $\frac{y\,dx}{dy}$. Col raggio AL si descriva il quadrante LM, e si conduca la parallela HM all'asse e l'infinitam.te vicina hm, indi la secante AG, e l'infinitam.te vicina As. Ciò posto si faccia nella Fig.a 63.a $DC = DC = x$ della Fig.a 62.a L'angolo LAS è sempre dato per x, e però si faccia nella Fig.a 63 l'angolo CDX, il quale stia all'angolo SAL :: m, n, essendo m, n numeri intieri positivi, ed in tal modo si averanno algebraicam.te tutti i punti X, cioè la curva AXn, impercioche algebraicam.te si può sempre avere la sezione di un angolo in ragion di numero a numero. Ciò posto sia Xq tangente la curva nel punto X, e $Dq = q$ perpendicolare a XQ. Si faccia $DO = AL$, sarà $Oo = \frac{a\,dz}{x}$, posto l'arco $CX = z$. Per la similitudine de' triangoli AMG, Mmn, sarà $Mm = \frac{a\,dy}{\sqrt{aa-yy}}$ ora perche l'angolo ADX sta all'angolo SAL :: m, n, sarà ancora Oo, Mm :: m, n, e però $\frac{a\,dz}{x}, \frac{a\,dy}{\sqrt{aa-yy}}$ :: m, n. ma per li triangoli simili Xpn, nQD, si ha $dz = \frac{q\,dx}{\sqrt{xx-qq}}$. dunque $\frac{q\,dx}{x\sqrt{xx-qq}} = \frac{m\,dy}{n\sqrt{aa-yy}}$. e perchè nel coroll.o 2.o I vol.a p.o di questo capo, uq è eguale al rettangolo costante AI × DR, posta AI la velocità iniziale, DR perpendicolare alla tangente nel punto del principio del moto, ed u la velocità attuale nel punto X, sarà $\frac{bc\,dx}{x\sqrt{xxuu-bbcc}} =$

$\frac{m\,dy}{n\sqrt{aa-yy}}$ e moltiplicando per y, e dividendo per dy, sarà $\frac{bc\,y\,dx}{x\,dy\sqrt{xxuu-bbcc}} = \frac{my}{n\sqrt{aa-yy}}$. Si faccia $\frac{y\,dx}{dy} = h$, e sarà $\frac{bch}{x\sqrt{xxuu-bbcc}} = \frac{my}{n\sqrt{aa-yy}}$, e quadrando $\frac{nnbbcc\,hh \times aa-yy}{mm}$ $= x^4uuyy - bbcc\,xxyy$ e però $uu = \frac{nnbbcchh \times aa-yy}{mm\,x^4yy} + \frac{bbcc}{xx}$

Sia per maggior speditezza $bbcc = l$, $aa-yy = vv$, dunque $uu = \frac{nnhlvv}{mm\,x^4yy} + \frac{l}{xx}$. e differenziando

udu

$udu = \frac{nnvvx^4yyhdh + nnhhx^4yyvdv - 2nnhhvvyyx^3dx - nnhhvvx^4ydy}{mmx^8y^4} - \frac{xdx}{x^4}$

Ma perche $\frac{ydx}{dy} = h$, sarà $hdy = ydx$, onde $udu = \frac{nnvvhdh}{mm} + \frac{nnhhvdv}{x^4yy} - \frac{2nnhhvvdx}{mmx^5yy} - \frac{nnvvhdx}{mmx^4yy} - \frac{dx}{x^3}$.

Si faccia $\frac{hdx}{dh} = p$, e però $hhdx = phdh$, onde $hdh = \frac{hhdx}{p}$, e sostituendo nell'equazione sarà $udu = \frac{nnvvhhdx}{mmpx^4yy} + \frac{nnhhvdv - nnvvhdx}{mmx^4yy} - \frac{2nnhhvvdx}{mmx^5yy} - \frac{dx}{x^3}$; ma $vdv = -ydy$ per aver fatto $aa-yy = vv$, e $dy = \frac{ydx}{h}$, dunque sarà $vdv = -\frac{yydx}{h}$, e sostituendo $udu = \frac{nnvvhhdx}{mmpx^4yy} - \frac{nnhdx}{mmx^4} - \frac{nnvvhdx}{mmx^4yy} - \frac{2nnhhvvdx}{mmx^5yy} - \frac{dx}{x^3}$; ma $udu = fdx$ ed $vv = aa-yy$; dunque sarà $f = \frac{nnh}{mmx^4} + \frac{h\overline{aa-yy}\,nn}{mmx^4yy} + \frac{2hh\overline{aa-yy}\,nn}{x^5yy} - \frac{hh\overline{aa-yy}\,nn}{mmpx^4yy} + \frac{1}{x^3}$, e finalmente

$f = \frac{aahpx + 2aahhp - 2hhpyy - aahhx + hhyyx}{x^5pyy} \times \frac{nn}{mm} + \frac{1}{x^3}$.

Ora essendo la curva LHh algebraica, e la y data per x e le costanti, si averà la sottangente, cioè h, sempre data per x, e le costanti in termini finiti, perche $h = \frac{ydx}{dy}$, e così pure la p, perche $p = \frac{hdx}{dh}$, ma h è data per x, dunque p data per x e le costanti, onde f sarà data in termini finiti per x, e le costanti. Ora perche infiniti sono dati per x, cioè avendo l'ordinata y, rappresentando la curva LHh infinite curve algebraiche, alle quali corrisponderanno altre infinite curve AFN pure algebraiche, ne viene che il nostro

canone

canone comprenderà infinite espressioni della sollecitazione variabile, le quali tutte ci daranno trajettorie algebraiche ... Corolli?

Egli è facile avere l'equazione generale delle infinite curve algebraiche AX, imperoche sendo l'angolo ASX all'angolo LAS :: m, n sarà n X ang.° ASX = m X ang.° LAS, e però le loro tangenti, supposto il medesimo raggio, o le loro secanti, o le loro corde saranno eguali. Sia dunq. SD = x, DX = z nella fig.ª 6.ª tutt. la tangente dell'angolo ASX sarà $= \frac{az}{x}$, e essendo il raggio AL = a e la secante sarà $= \frac{a\sqrt{zz+xx}}{x}$. Sicche per le note regole la tangente dell'angolo multiplo nASX

sarà $$\frac{n a^n \frac{z}{x} - \frac{n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}}{1\cdot2\cdot3} a^n \frac{z^3}{x^3} + \frac{n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}\cdot\overline{n-3}\cdot\overline{n-4}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} a^n \frac{z^5}{x^5} \ldots}{a^{n-1} - \frac{n\cdot\overline{n-1}}{1\cdot2} a^{n-1} \frac{zz}{xx} + \frac{n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}\cdot\overline{n-3}}{1\cdot2\cdot3\cdot4} a^{n-1} \frac{z^4}{x^4} - \&}$$

Cosi posta t la tangente dell'angolo SAL, sarà la tangente dell'angolo multiplo mSAL =

$$\frac{m a^{m-1} t - \frac{m\cdot\overline{m-1}\cdot\overline{m-2}}{1\cdot2\cdot3} a^{m-3} t^3 + \frac{m\cdot\overline{m-1}\cdot\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}\cdot\overline{m-4}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} a^{\ldots}}{a^{m-1} - \frac{m\cdot\overline{m-1}}{1\cdot2} a^{m-3} tt + \frac{m\cdot\overline{m-1}\cdot\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}}{1\cdot2\cdot3\cdot4} a^{m-5} t^4 - \&}$$

Dunque avremo l'equazione

$$\frac{n a^n \frac{z}{x} - \frac{n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}}{1\cdot2\cdot3} a^n \frac{z^3}{x^3} + \frac{n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}\cdot\overline{n-3}\cdot\overline{n-4}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} a^n \frac{z^5}{x^5} - \&}{a^{n-1} - \frac{n\cdot\overline{n-1}}{1\cdot2} a^{n-1} \frac{zz}{xx} + \frac{n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}\cdot\overline{n-3}}{1\cdot2\cdot3\cdot4} a^{n-1} \frac{z^4}{x^4} - \&}$$

$$= \frac{m a^{m-1} t - \frac{m\cdot\overline{m-1}\cdot\overline{m-2}}{1\cdot2\cdot3} a^{m-3} t^3 + \frac{m\cdot\overline{m-1}\cdot\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}\cdot\overline{m-4}}{1\cdot2\cdot3\cdot4} a^{m-5} t^5}{a^{m-1} - \frac{m\cdot\overline{m-1}}{1\cdot2} a^{m-3} tt + \frac{m\cdot\overline{m-1}\cdot\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}}{1\cdot2\cdot3\cdot4} a^{m-5} t^4 - \& -}$$

Permerw

Per mezzo delle secanti, sarà la secante dell'angolo multiplo

$$nADX = \frac{\alpha\sqrt{xx+zz}^{\frac{n}{2}}}{x^n - \frac{n\cdot\overline{n-1}}{1\cdot 2}x^{n-2}zz + \frac{n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}\cdot\overline{n-3}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4}z^4 - \&}$$

La secante dell'angolo multiplo $mLAS$, posta $= t$ la tangente dell'angolo LAS, ed S la secante, sarà $=$

$$\frac{S^m}{{}^{m-1} - \frac{m\cdot\overline{m-1}}{1\cdot 2}a^{m-3}tt + \frac{m\cdot\overline{m-1}\cdot\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{m-5}t^4 - \& -}$$

e pertanto averemo l'equazione

$$\frac{\alpha\sqrt{xx-zz}^{\frac{n}{2}}}{x^n - \frac{n\cdot\overline{n-1}}{1\cdot 2}x^{n-2}zz + \frac{n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}\cdot\overline{n-3}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4}z^4 - \&} = \frac{S^m}{a^{m-1} - \frac{m\cdot\overline{m-1}}{1\cdot 2}a^{m-3}tt + \frac{m\cdot\overline{m-1}\cdot\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{m-5}t^4 - \&}$$

Le quantità S, t sono date per la x, e le costanti, e le equazioni saranno sempre finite, perchè sendo m, n numeri interi positivi, le serie si troncano.

Problema 14°.

Determinare nel circolo la forza centrifuga.

Si mova il corpo di moto uniforme nella circonferenza di un circolo, il di cui raggio sia $= a$, e sia attaccato ad un filo, e noto, ch'egli fa forza per girsene per la tangente, e questa forza è eguale a quella, che lo tiene nella periferia, e con questa tien teso il filo. Ciò posto è facile la soluzione, servendosi del Problema delle forze centrali tendenti al centro della Ellisse come nell'esempio 4° del Prob.ª 5° quivi [illegible] consideraremo, che le forze centrifughe sono elleno sempre eguali alle centripete.

Abbiamo

Abbiamo dunq. nel citato esempio $\frac{f}{qq} = \sqrt{\frac{zz+yy}{aabb}}$; ma posta b = a, allora l'Ellisse passa ad essere il circolo del raggio = a, e così pure* $\frac{f}{gg} = \frac{1}{a^3}$. ma g è il prodotto della velocità del projetto nella perpendicolare dal centro delle forze alla tangente della curva; la quale nel circolo è pure = a raggio, onde chiamata la velocità u, sarà $f = \frac{uu}{a}$.

Coroll.° p.° Fig.ª 6 4.ª

Sia CD = s lo spazio da cui cadendo il corpo abbia acquistata la velocità = u, e sia m la massa del corpo. Poichè 2 ms = uu, fatta la sostituzione sarà $f = \frac{2ms}{a}$, cioè la forza centrifuga starà alla massa, ossia gravità, come la doppia altezza CD al raggio, e posta a = 2s, sarà f = m cioè la forza centrifuga eguale alla gravità, quando il corpo sia spinto colla velocità, che avrebbe acquistata cadendo da altezza eguale alla metà del raggio.

Coroll.° 2.°

Sia il tempo d'una intera rivoluzione = t; essendo equabile il moto, sarà $t = \frac{ca}{u}$, posta c = alla circonferenza. ma poichè uu = af, dunq. sarà $\frac{ccaa}{tt} = af$, ossia $t = \frac{c\sqrt{a}}{\sqrt{f}}$.

Coroll.° 3.°

Paragoniamo ora la forza centrifuga del corpo nel dato circolo con quella d'un altro corpo in un altro circolo, la di cui massa = M, velocità = V, raggio = A altezza della caduta = S, forza F. dunq. sarà $f = \frac{2ms}{a}$, ed $F = \frac{2MS}{A}$ e posto m = M, e f.F :: $\frac{2s}{a}$, $\frac{2S}{A}$, cioè le forze nella ragione composta della diretta delle doppie altezze e della inversa de' raggi; e perchè 2s = uu e 2S = VV, saranno le forze direttam.te come i quadrati delle velocità ed in conseguenza, come i raggi.

Coroll.° 4.°

E se i corpi eguali faranno le loro rivoluzioni in tempi eguali, sarà u, V :: ca, CA, ossia :: a, A, e perciò
essendo

* è √zz+yy = a onde l'equazione sarà f

essendo $f, F :: \frac{uu}{a}, \frac{VV}{A}$, ... ancora $f, F :: a, A$, cioè le forze come i raggi.

Coroll.° 5°.

E se i raggi eguali averanno velocità eguali, essendo $f, F :: \frac{uu}{a}, \frac{VV}{A}$; sarà $f, F :: \frac{1}{a}, \frac{1}{A}$, cioè nella ragione inversa de' raggi.

Coroll.° 6°.

Ma poiche $t = \frac{ca}{u}$, $T = \frac{CA}{V}$, essendo $u = V$, sarà $c, C :: t, T$; ma $c, C :: a, A$; dunque i tempi come i raggi, cioè nella ragione inversa delle forze.

Coroll.° 7°.

Sieno le velocità in qualunque ragione delle distanze, cioè $u = r^n$, $V = R^n$, averemo $fr, FR :: r^{2n}, R^{2n}$, cioè $f, F :: r^{2n-1}, R^{2n-1}$, e però se le velocità saranno come le distanze, cioè $n = 1$, le forze saranno come le medesime distanze; e se le velocità saranno nella ragione inversa dimidiata d'esse distanze, cioè $m = -\frac{1}{2}$, saranno le forze nella ragione inversa duplicata delle distanze, imperocché $f, F :: r^{-2}, R^{-2}$. In questa ipotesi i tempi sono nella ragione sesquiplicata delle distanze, nel che consiste il famoso Teorema del Keplero per li moti celesti. Imperocché essendo $\frac{c}{u}, t :: \frac{C}{V}, T$, oppure $\frac{v}{u}, \frac{R}{V} :: t, T$, cioè $\frac{vv}{uu}, \frac{RR}{VV} :: tt, TT$, ed essendo* $\frac{v}{f}, \frac{R}{F} :: tt, TT$; ma $f = \frac{1}{vv}$, ed $F = \frac{1}{RR}$, dunq. $v^3, R^3 :: tt, TT$. Se i tempi periodici sono eguali, le forze centrifughe saranno come le distanze.

Coroll.° 8°.

Poiche (coroll.° 3°) $f, F :: \frac{2s}{a}, \frac{2S}{A}$, se i raggi saranno eguali sarà $f, F :: 2s, 2S$, cioè $f, F :: uu, VV$, le forze come i quadrati delle velocità.

Coroll.° 9°.

Se sono eguali le forze, sarà $\frac{2s}{a} = \frac{2S}{A}$, cioè $s, S :: a, A$. Ma ne' moti equabili i tempi sono come gli spazj divisi per le velocità, dunq. $t, T :: \frac{s}{u}, \frac{S}{V}$; ma $s, S :: a, A$, e $u, V :: \sqrt{s}, \sqrt{S}$, dunq. $t, T :: \sqrt{a}, \sqrt{A}$, cioè i tempi nella ragion. dimidiata de' raggi.

Coroll.°

---

* $uu = fr$, e $VV = FR$, sarà dunque $\frac{v}{f}$ etc.

Coroll.° 10 Fig.ª 65.ª

Sia il corpo M attaccato al punto sublime A col filo AM, e siamosso in modo, che descriva il filo la superficie d'un cono retto coll'asse AC, e colla base circolare del raggio CM sarà in questo caso sollecitato il corpo M da due forze, cioè dalla gravità verso il comun centro de' gravi, e dalla forza centrifuga, che orizzontalmente lo tiene lontano dal centro C. Ma per le leggi della mecanica, essendo il corpo nella direzione AM, sarà la gravità alla forza centrifuga :: AC, CM, ò $f=\frac{am}{AC}$ (m è il peso del corpo, ed a = CM); ma è an... $f=\frac{ams}{a}$, dunque $s=\frac{aa}{2AC}$. Ma $u=\sqrt{s}$, dunq. $u=\frac{a}{\sqrt{2AC}}$. Ma il tempo nel moto equabile è eguale allo spazio diviso per la velocità; dunq chiamata c la periferia del circolo, il tempo d'una rivoluzione sarà $t=\frac{c\sqrt{2AC}}{a}$.

Coroll.° 11. Fig.ª 66.ª

Sia un'altro corpo H spinto con velocità = V attaccato al filo BC, e descriva il circolo del raggio = A, circonferenza = C nel modo come sopra. sarà il tempo di una rivoluzione $T=\frac{C\sqrt{2BC}}{A}$ e però $t, T :: \frac{c\sqrt{2AC}}{a}, \frac{C\sqrt{2BC}}{A} :: \sqrt{AC}, \sqrt{BC}$, cioè i tempi 2.ª nella ragion dimidiata delle altezze.

Coroll.° 12.°

Cada (Fig.ª 65.ª) il corpo M da altezza doppia di CA, il tempo impiegato a cadere sarà $=\sqrt{4CA}$, e però sarà questo tempo a quello, che impiega in una rivoluzione attorno al centro C :: $\sqrt{4CA}, \frac{c\sqrt{CA}}{a}$ :: 2a, c, cioè come il diametro alla circonferenza.

Il che sendo vero qualunq si sia il dato circolo, sarà ancora vero in una rivoluzione minima attorno al centro C; ma allora BM = BC, dunq. il tempo d'una rivoluzione minima sarà al tempo della caduta per una altezza doppia della lunghezza del pendolo, come la circonferenza di un circolo al suo diametro.

Coroll.° 13.°

Sia BC nella Fig.ª 66.ª CM nella Fig.ª 65.ª, ed il tempo di

una

una rivoluzione del corpo M eguale al tempo di una ri:
voluzione del corpo H

Cap. IV.
Della Statica.

F.^a I.

Definizioni

1. Se più sollicitazioni espresse per esempio dalle rette BA, CA, DA opereranno nel punto A con direzi: oni BA, CA, DA, condotta come più piace una retta MN pel punto A, tutte quelle, che sono da una parte d'essa retta MN o parallele, o convergenti che sieno si chiamano cospiranti rispetto all'altre, che diconsi contrarie a queste; e se le direzioni loro sono in senso opposto, cioè da A, verso B, C, D ciascheduna d'esse si chiama contraria, e se sono poste in diretto, diconsi direttam.^te contrarie.

2.^a Due o più sollicitazioni potenze o pesi si diranno in equilibrio rispetto ad un punto, per esempio A, quando sono tali, e talmente poste, che uno non prevaglia all'altro. ed il punto A dirassi centro dell'equi: librio; e le due, sollicitazioni AB, AC equivale: ranno all'altra AD, il qual termine di equivale: re non si deve intendere, che significhi eguaglian: za, ma si bene, che l'effetto delle due sarà eguale all'effetto della terza. Le suddette definizioni egual: mente vagliono se le sollicitazioni saranno applica: te, non ad un punto, ma ad una linea, ad un piano, od un corpo. Se | Fig. 2.^a | la DG, che suppongo

equivalere all'altro, se produrrà indefinitamente dalla parte di G, si chiamerà essa la media direzione delle sollicitazioni BR, HS, CL, ossia l'asse dell'equilibrio, ed il punto G si dirà centro dell'equilibrio.

3.ª Centro di gravità di una linea, di una superficie, di un corpo, in una parola, di una grandezza è quel punto, da cui intendendosi sospesa la stessa grandezza, le di lei parti sono tutte in equilibrio.

4.ª Centro di gravità di più grandezze è quel punto da cui essendo esse tutte sospese per mezzo di verghe rigide e senza peso, si mantengono in equilibrio.

Coroll.° Fig. 3.ª

Da questa definizione, e dal coroll.° 3.° del Lemma, ne viene, che se i centri di gravità di due corpi A, B, saranno uniti dalla retta AB, ed in essa si prenda il punto M, tale che sia A, B :: BM, AM, sarà M il comune centro di gravità dei corpi A, B. Quindi se sia $A = B$; sarà ancora $AM = BM$.

5.ª Il prodotto del corpo B nella distanza BM chiamasi il momento del corpo B, e così degli altri. Quindi $B \cdot BM = A \cdot AM$, sarà il momento di B uguale al momento di A; e per mezzo di questa equazione, date tre di queste quantità qualunque elle siano si avrà sempre la quarta.

Coroll.°

Quindi se considereremo il corpo B posto in H, sarà

H, sarà H. MH maggior di B. MB quanto è il prodotto di H, ossia di B. BH; e però il momento in H sarà maggiore del momento in A, quanto il ~~mo~~ ~~mento~~ prodotto B. BH. Sia il peso A due libre, la distanza MA tre palmi, il peso B tre libre, MB due palmi, BH quattro; sarà dunq. il momento in H al momento in A, come 18 a 6; onde se volessimo che nel punto di sospensione M seguisse l'equilibrio, bisognerebbe, che il peso H fosse d'una sola libra.

Dimanda

Che il peso di ciascun corpo sia proporzionale alla massa, ossia quantità di materia di esso corpo. La verità di questa dimanda abbastanza è resa certa dall'Ugenio, Newton, Ermanno, ed altri, e d'altri ancora si dimostrerà dove tratteremo de' pendoli.

Teorema 9.° Fig. 4.ª

Sia un piano orizzontale considerato senza gravità, a cui sieno applicati quanti [illegible] pesi o potenze si vogliono che operino con tutte perpendicolarmente e sia E il ~~ad~~ loro comune centro di gravità, per il quale tirisi una qualunq. retta HI. Dico, che condotte le normali AG, CK, DL, BS alla HI, sarà

$$A\cdot AG + B\cdot BS = C\cdot CK + D\cdot DL.$$

Poichè E è il comune centro di gravità de' pesi, sostenuto il piano nel punto E, sarebbe egli immobile;

e per conseguenza lo sarebbe ancora sostenuto dalla retta HI, e però la somma de' momenti dell'una parte di essa dovrà essere uguale alla somma dell'altra. ma rispetto alla retta HI i momenti sono i prodotti de' pesi nelle respettive distanze; adunque sarà $A.AG+B.BS=C.CK+D.DL$.

Teorema 2.° Fig. 5.ª

Dati quanti pesi si voglion A, B, C, D, e dati di posizione due piani normali fra loro, che passino per le rette MN, FE; dico p.° che la somma de' prodotti di ciascun peso nella rispettiva distanza dal piano MN sarà uguale al prodotto della somma di tutti i pesi nella distanza del loro commune centro di gravità dal suddetto piano. Dico 2.°, che la differenza della somma de' prodotti di ciascun peso collocato rispetto al piano FE dalla parte del comun centro di gravità, nella rispettiva distanza dal sud.° piano FE, sopra la somma de' prodotti degli altri pesi nelle rispettive distanze dal medesimo piano è uguale al prodotto della somma di tutti i pesi nella distanza del loro commun centro di gravità dal piano FE.

Sia G il loro comun centro di gravità, e si conduca per esso la retta HI parallela a MN, e le rette HAM, COQ, DSR, IBP, parallele ad EF. Sarà intorno la retta HI l'asse dell'equilibrio e però nel Teorema p.° $C.CO+D.DS=A.AH+B.BI$ o

ma $A \cdot AM = A \cdot Gi - A \cdot AH$, e $B \cdot BP = B \cdot Gi - B \cdot BI$; e $C \cdot CQ = C \cdot Gi + C \cdot CO$; e $D \cdot DR = D \cdot Gi + D \cdot DS$; adunq. sarà $A \cdot AM + B \cdot BP + C \cdot CQ + D \cdot DR = A \cdot Gi - A \cdot AH + B \cdot Gi - B \cdot BI + C \cdot Gi + C \cdot CO + D \cdot Gi + D \cdot DS$; ma $C \cdot CO + D \cdot DS - A \cdot AH - B \cdot BI = 0$, adunq. $A \cdot AM + B \cdot BP + C \cdot CQ + D \cdot DR = \overline{A + B + C + D} \times Gi$, ch' era il primo.

Sarà pure Gi asse dell'equilibrio, e però sarà $B \cdot Pi + D \cdot Ri - A \cdot HG - C \cdot Qi = 0$. ma $B \cdot PF = B \cdot IG + B \cdot iF$, e $D \cdot RF = D \cdot SG + D \cdot iF$, ed $A \cdot MF = A \cdot Mi - A \cdot Fi$, e $C \cdot QF = C \cdot Qi - C \cdot Fi$; dunq. sarà $B \cdot PF + D \cdot RF - A \cdot MF - C \cdot QF = B \cdot IG + B \cdot iF + D \cdot SG + D \cdot iF - A \cdot Mi + A \cdot Fi - C \cdot Qi + C \cdot Fi$; ma $B \cdot IG + D \cdot SG - A \cdot Mi - C \cdot Qi = 0$, adunq. $B \cdot PF + D \cdot RF - A \cdot MF - C \cdot QF = \overline{B + D + C + A} \times Fi$, ch' era il 2do.

Coroll. 1°.

Se uno, o tutti due i piani dati di posizione passassero per lo centro di gravità di qualche peso, come se MN passasse per A, o FE per C, allora sarebbe AM nel primo caso, QF nel secondo $= 0$, e però nelle nostre formule, si dovrebbero cancellare que' termini dov'entrassero AM, o QF, e sarebbero modificabili [illegible] caso nostro.

Probl. 2do.

Dati quanti pesi si vogliono dati di posiz.e si richiede a maniera di ritrovare il loro commun centro di gravità. Imperciocchè chiamata $Fi = q$, sarà $q = \frac{B \cdot PF + D \cdot RF - A \cdot MF - C \cdot QF}{B + D + C + A}$, e perchè nell'uno genere di com:

comparazione tutte le quantità sono date, sarà data la distanza del centro dal piano EF. Ora chiamata Z la distanza di esso centro dall'altro piano MN, sarà

$$Z = \frac{A \cdot AM + B \cdot BP + C \cdot CQ + D \cdot DR}{A + B + C + D}$$

e perchè qui pure nell'omogeneo di comparazione sono tutte quantità note sarà data pure la distanza d'esso centro dal piano MN, cioè sarà data di posizione la verticale in cui trovasi. Che se i pesi fossero tutti nel medesimo piano, sarebbe in esso dato il preciso punto del centro di gravità cercato.

Coroll.° 3.°

Se i pesi saranno tutti eguali, allora la somma delle loro distanze dal piano MN sarà moltiplice secondo il n.° de' pesi della distanza del comun centro di gravità dal medesimo piano, e rispetto al piano FE sarà la differenza di esse distanze dal piano FE multipla della distanza del centro comune di gravità dal medesimo piano.

Coroll.° 4.°

Ora facilm.te si ponno ritrovare le formule analitiche per avere generalm.te i centri di gravità delle linee, delle superficie, de' corpi. Sia (fig. 6.a) la asse AB la curva DAE il di cui braccio EA simile ed eguale, e similm.te posto del braccio AD. Sia AC = x, CD = y, AD = s, l'infinitesime CB = dx, DM = ds sia HA parallela a CD. Poichè il peso della curva AD è la curva stessa sarà ds il peso, che corrisponde

alla

alla distanza AC. Sia ~~quale~~ = z la ricercata distanza del centro di gravità dal punto A. Adunque nel 3ed.ᵃ ado, sarà $\int 2x\,ds = z\int 2\,ds$, e però $z = \frac{\int x\,ds}{s}$ formula per le linee.

Il rettangolo infinitesimo ME sarà il peso dello spazio, che corrisponde alla distanza AC, duny. $\int 2yx\,dx = z\int 2y\,dx$, e però $z = \frac{\int yx\,dx}{\int y\,dx}$ per gli spazj.

Sia la ragione del raggio alla circonferenza del circolo quella di r alla c, la circonferenza del raggio y sarà $= \frac{cy}{r}$, e l'area $= \frac{cyy}{2r}$, onde $\frac{cyy\,dx}{2r}$ l'elemento del solido generato dalla curva DA mossa attorno all'asse AB. ma esso elemento è il peso, che corrisponde alla distanza CA; adunq. $\int \frac{cyyx\,dx}{2r} = z\int \frac{yy\,dx}{2r}$, e però $z = \frac{\int yyx\,dx}{\int yy\,dx}$ per i solidi.

Esempio p.° Fig.ᵃ 7.ᵃ

Sia la curva DAE un arco di cerchio, il raggio AB = a perpendicolare alla corda EC; BN = x, CN = y = $\sqrt{aa-xx}$; adunq. $ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{aa-xx}}$, e $s = \int \frac{a\,dx}{\sqrt{aa-xx}}$. è chiaro, che essendo AN perpendicolare alla CD, il centro di gravità dell'arco DAC, sarà nella retta AN, e sia in F. Fatte le sostituzioni nella formula generale, sarà $BF = z = \frac{\int \frac{ax\,dx}{\sqrt{aa-xx}}}{\int \frac{a\,dx}{\sqrt{aa-xx}}}$

ma $\frac{x\,dx}{\sqrt{aa-xx}} = -dy$; adunq. sarà

$z = \frac{\int -a\,dy}{\int \frac{a\,dx}{\sqrt{aa-xx}}}$ cioè $z = \frac{-ay}{\int \frac{a\,dx}{\sqrt{aa-xx}}}$; ma

$\int\frac{-adx}{\sqrt{aa-xx}} = DA$; adunq. z sarà eguale alla quarta proporzionale dell'arco AD, del raggio AB, e dell'ordinata DV. Se l'arco dato fosse la semiperiferia, sarebbe $y=a$, e però $z = \frac{-aa}{s}$, cioè BF la terza proporzionale del quadrante, e del raggio.

Esempio 2do. Fig.a 8.a

Sia il parallelogrammo ABCD, e sia $AD=a$, $DC=b$, $EC=f$, $CA=x$, $AG=dx$. Il parallelogrammo infinitesimo IM sarà il peso, che corrisponde alla distanza EG dalla retta AC. ma nella formula generale esso viene espresso dalla ydx, adunq. in questo caso sarà $ydx = adx$, e fatta la sostituzione, $z=\frac{\int axdx}{\int adx}$ cioè $z = \frac{x}{2}$; e posta $x = f$ riguardo a tutto il parallelogrammo, $z = \frac{f}{2}$ metà dell'altezza.

Esempio 3.o Fig.a 9.a

Sia il triangolo ABC e si cerchi il centro di gravità dell'area. È manifesto che se dal punto B si conduca alla base AC una retta, che per metà la divida, in essa retta sarà il centro quesito, restando pure per metà divise tutte le parallele alla base. Per le altro non rimane da cercarsi colla nostra formula se non la distanza di esso dal punto B. Sia $BC=a$, $AC=b$, $BF=c$, e nominiamo [illegible] $BT=x$, $TR=dx$, $TE=y$. Per la similitudine de' triangoli CBF, RTS sarà $TS = \frac{cdx}{a}$, ed il parallelogrammo $ES = \frac{cydx}{a}$, il quale è il peso, che corrisponde alla distanza SY essia BY dalla linea BP; e per la similitudine de' triangoli BSY, CQB è $SY = \frac{cx}{a}$; dunq. nella

nella

nella formula generale si sostituite questi valori in luogo di x, e di ydx, sarà $z = \frac{\int \frac{ccyxdx}{aa}}{\int \frac{cydx}{a}}$; ma $y = \frac{bx}{a}$, adunq. fatte le integrazioni, ed omesse le costanti superflue, $z = \frac{2cx}{3a}$; e fatta $x=a$, sarà $z = \frac{2}{3}c$. quindi presa $BV = \frac{2}{3}c$, e condotta per V la VE parallela ad AC, il centro questo sarà in M, dove essa incontra la BL.

Esempio 4°. fig. 10°.

Sia il settore ABC, di cui si cerca il centro di gravità. Qui fa d'uopo fare una osservazione, cioè, che le ordinate nella stessa figura ponno cangiar di valore. Ed infatti sia $AL=x$, $LI=y$, $AD=a$, $AO=c$, $OB=b$. In o[illegible] il triangolo AOB sono $= \sqrt{aa-xx}$. Per isfu: gire adunq. questa difficoltà sia ABC un settore in: finitesimo, e parimenti sia IF un anello infinitesimo concentrico all'arco BCD. Ciò posto, sia $AZ=s$, l'arco $DB=t$. Essendo simili i settori ABD, AQZ sarà $x=\frac{cs}{a}$, e $cdt=adb$, perchè come AB (a) al differen: ziale (dt) dell'arco DB, così AO (c) al differenziale dell'arco simile; ma il differenziale dell'arco simile assumere eguale al differenziale della tangente, adun: q. a, dt :: c, db. Lo spazietto infinitesimo del secon: do ordine IH, sarà $= \frac{sdsdt}{a}$, ma esso è lontano della distanza $AL = x = \frac{cs}{a}$, dunque se moltiplicheremo per $\frac{cs}{a}$ il peso, e se integreremo, supposta dt costante, avremo $\frac{cs^3dt}{3aa}$, e fatta $s=a$, $\frac{cadt}{3}$ numeratore.

della

della formula rispetto al settore ABC. e di nuovo integrando, $\frac{cat}{3}$, numeratore della frazione rispetto al settore ABC. quanto al denominatore, s'integri $\frac{sdsdt}{a}$, supposta dt costante, e sarà $\frac{ssdt}{2a}$, e fatta $s=a$, sarà $\frac{adt}{2}$ rispetto al settore ABC, e di nuovo integrando, $\frac{at}{2}$ denominatore della formula rispetto a tutto il settore ABC, onde sarà finalm.te $z=\frac{2}{3}c$.

Per mezzo dell'anello IF si moltiplichi lo spazietto IH nella distanza $AL = x = \frac{cs}{a}$, onde sia $\frac{cssdsdt}{aa}$; s'integri, supposte s, e ds costanti, e sarà $\frac{ctssds}{aa}$, e di nuovo integrando, fatta t costante, rispetto al settore AQ7, $\frac{cts^3}{3aa}$, e fatta $s=a$, $\frac{cat}{3}$ rispetto a tutto il settore. quanto al denominatore, s'integri $\frac{sdsdt}{a}$, supposte s, e ds costanti, e sarà $\frac{tsds}{a}$, e di nuovo integrando, supposta t costante, rispetto al settore AQ7, sarà $\frac{tss}{2a}$, e fatta $s=a$ rispetto a tutto il settore, sarà $\frac{at}{2}$; onde finalm.te $z=\frac{2}{3}c$, come prima. Ora poiche $ab = cdt$, sarà anco $ab = ct$, e però $c = \frac{ab}{t}$; dunq. la distanza del centro di gravità del settore, dal centro del circolo sarà alla distanza del centro di gravità dell'arco dal medesimo centro del circolo (per l'esempio p.o) come 2 a 3.

* Esempio 6.o Fig.a 6.a

Se raggiri la linea CDAE attorno all'asse AC, genererà ella un solido; e se CDAE sarà un triangolo, sarà generato un cono. si dimanda il centro di gravità di esso. Sia l'asse $= a$, il raggio del circolo, che serve di base $= b$, sarà dunque $y = \frac{bx}{a}$, e fatta la sostituzione

zione nella formula generale, sarà $z = \frac{\int bbx^3dx}{\int bbxxdx}$,
cioè $z = \frac{3}{4}x$, lo stesso vale delle piramidi
Sia y costante $= b$. Il solido generato sarà un cilin:
dro, e però sarà $z = \frac{\int bbxdx}{\int bbdx}$, cioè $z = \frac{1}{2}x$. Lo
stesso vale de parallelipipedi, e prismi
Sia DAC un paraboloide dell'equazione $y^m = a^n x^v$;
sarà $yy = a^{\frac{2n}{m}} x^{\frac{2v}{m}}$: onde fatta la sostituzione
sarà $z = \frac{\int a^{\frac{2n}{m}} x^{\frac{2v+m}{m}} dx}{\int a^{\frac{2n}{m}} x^{\frac{2v}{m}} dx}$, cioè $z = \frac{(2v+m)x}{2v+2m}$
Se sarà $m = 2$, $v = 1$, $n = 1$, avremo $z = \frac{2}{3}x$.
Se sarà $m = 3$, $v = 1$, $n = 2$, avremo $z = \frac{5}{8}x$ etc.
Sia DAC un arco di cerchio del raggio $= a$; il
solido generato sarà un segmento di sfera sarà
adunq. $yy = 2ax - xx$; e però avremo $z = \frac{\int 2axxdx - x^3dx}{\int 2axdx - xxdx}$,
cioè $z = \frac{8ax - 3xx}{12a - 4x}$, e posta $x = a$, cioè conside:
rando un emisfero, $z = \frac{5}{8}a$.
Se i solidi non fossero retti al piano della base se ri:
verrà nonostante le medesime determinazioni; im:
perciocchè è manifesto, che il loro centro di gravità
sarà nell'asse, cioè nella retta, che dal vertice va
al centro della base, e una qualunque porzione, o
altezza è all'altezza intera, come una simil parte
dell'asse all'asse

*pongasi p.ª del 6.º il 8.º che siegue.

Esempio 3.° Fig. 6.ª

Sia $\overline{\text{AC}}$ del genere delle parabole la di cui equazione $y^m = a^n x^v$, e si cerchi il centro di gravità dello spazio. Sarà $y = a^{\frac{n}{m}} x^{\frac{v}{m}}$, e fatte le sostituzioni nella formula generale, avremo $z = \dfrac{\int a^{\frac{n}{m}} x^{\frac{v+m}{m}} dx}{\int a^{\frac{n}{m}} x^{\frac{v}{m}} dx}$,

cioè integrando, $z = \dfrac{\overline{v+m} \times x}{v+2m}$.

Sia $m = 2$, $n = v = 1$, cioè la parabola apolloniana sarà $z = \frac{3}{5} x$, cioè il centro di gravità, contando dal vertice ~~tre~~ quinti della ascissa.

Sia $v = 1$, $m = 3$, $n = 2$, parabola cubica sarà $z = \frac{4}{7} x$.

— — — — — — — — — —

Scolio.

Dalle cose fin qui esposte si può dimostrare la regola del P. re Guldino; cioè che il solido generato dalla rotazione di una qualunque figura piana attorno ad un asse sarà eguale al prodotto della figura moltiplicata nella via o sia circolo descritto dal centro di gravità di essa figura. Sia (Fig.ª 11.) ABD la figura, il centro di gravità F, l'asse della rotazione AD, e sia FG normale ad AD. Sia AC = x, CE = dx, CE = y la figura generatrice ABD = f, il solido generato = s, il di lui elemento = ds.

Dunque sarà af = alla somma di tutti i momenti delle parti esistenti in una figura f ed ydx sarà l'elemento dell'area ed $\frac{y}{2}$ sarà la distanza del di lui centro ... [illegible] dalla AD; adunque $yy\frac{dx}{2}$ il di lui momento e però $\int yy\frac{dx}{2}$ = af, ed in oltre sarà $\int \frac{c\,yydx}{2r} = \frac{caf}{r}$ posto $\frac{c}{r}$ è la periferia del raggio

GF, è $\frac{cy}{v}$ la semiperiferia del raggio CE, e $\frac{cyy}{2v}$ l'area del circolo: adunq. $\int \frac{cyydx}{2v}$ sarà l'integrale dell'elemento del solido, e però $= s$, onde $\frac{caf}{v} = s$.
Per la stessa ragione se il punto F sarà il centro di gravità della curva AB, la superficie generata dalla rotazione della curva sarà eguale al rettangolo della curva nella via del centro di gravità. Le stesse cose saranno pure vere, se la figura in luogo di rotarsi attorno all'asse, si muova parallela a se stessa. È da notarsi, che l'accennata regola ha luogo solamente per que' corpi, che sono uniformemente gravi.

Delle sollecitazioni.

Teorema 3°.

Se tre sollecitazioni o potenze applicate ad un punto staranno in equilibrio, saranno esse tra loro come i seni degli angoli loro opposti.
Sieno (Fig.ª 12.ª) le tre potenze applicate al punto A nelle direzioni AM, AB, AC espresse dalle medesime linee: dico che qualunq. di esse, come AM, sarà ad una dell'altre per esempio AB nella ragion del seno dell'angolo BAC al seno dell'angolo MAC. Si compisca il parallelogrammo BC. Poichè AM = AD, sarà AD : AB :: AD : AB, ma in qualunq. triangolo i lati sono sempre nella ragione de' seni degli angoli opposti, dunq. sarà AD ad AB, come il seno dell'angolo ABD ossia BAC [illegible], al seno dell'angolo BDA ossia DAC al suo eguale, ossia MAC

sup

supplemento a due retti; dunque sarà AM ad AB come il seno dell'angolo BAC al seno dell'angolo MAC, e così di ciascuna altra sollecitazione.

Coroll.° 1.°

Poichè il Teorema non è vero, se non nel caso, che le potenze attorno al punto A siano in equilibrio, bisogna, che ciascuna di esse potenze sia eguale a quella, che risulta dalla composizione dell'altre due; imperciocchè attorno al punto A non saranno in equilibrio, se AM non sia = AD; AC = AQ; AB = AB; e però ciascuna di esse bisognerà, che sia minore della somma dell'altre due.

Coroll.° 2.° Fig.ª 13.ª

Posto questo Teorema è cosa facile a determinare rispetto ad un punto A la direzione di tre date potenze in modo, che sieno in equilibrio. Sieno le tre date potenze B, M, C. si dia a B qualsivoglia direzione [illegible]. [illegible] BA, indi ad arbitrio prodotta BA in C, sopra AC si costruisca ACF tale, che i di cui lati AC, CF, AF sieno tra di loro come le tre date potenze. indi [illegible] la potenza M [illegible] direzione AM [illegible] CF e la potenza C nella direzione AF; ciò fatto saranno in equilibrio. Imperciocchè se sono [illegible] del triangolo ACF ed i lati come i seni degli angoli opposti, sarà [illegible] M, come il seno dell'angolo [illegible] C, ossia MAF [illegible] al seno dell'angolo CAF ossia BAF [illegible]; e sarà B a C, come il seno dell'angolo CA

A

AFC, ossia MAF complemento, al seno dell'angolo AC F, ossia MAC eguale, ossia MAB complemento, sarà in equilibrio.

Coroll.e 3.° Fig.a 12.a

Se due sollecitazioni, per esempio AB. AC saranno eguali, la direzione della terza AM, cioè AX dividerà in due egualm.te l'angolo BAC.

Problema p.° Fig.a 14.a

Date quante sollecitazioni, o potenze si vogliono, applicate al medesimo punto, o corpo, ritrovare la media direzione loro, e la sollecitazione equivalente a tutte. Sia P il punto suo, le sollecitazioni, e direzioni loro sieno AP, BP, CP, DP, e sia PR la quesita media direzione, e sollecitazione equivalente alle date. Pel punto P si conduca la retta GM, ed ad essa le perpendicolari AG, BH, CK, DM, e PS indefinita, e dal punto R la parallela RS. La sollecitazione PR si risolve nelle laterali SP normale a GM, RS parallela; così pure le sollecitazioni AP, BP, CP, DP si risolvono nelle normali AG, BH, CK, DM, e nelle parallele GP, HP, KP, MP; ora poiche PR deve equivalere a tutte le oblique, bisognerà che PS sia eguale a tutte le normali AG, BH etc. ed SR eguale all'eccesso delle parallele MP, KP sopra le GP, HP, se la somma di quelle è maggiore della somma di queste; e nel caso contrario il punto R sarà dalla opposta parte: ...

Dunq.

Adunq. considerando i punti A, B, C, D come tanti resi uguali il di cui n.º sia n ed il loro commune centro di gravità sia sia per esempio in E, sarà pel Teor.ª 2; $GA + BH + CK + DM = n \times EN$ e però $SP = n \times EN$ e il medesimo Teor.ª, sarà $MP + KP - GP - HP = n \times PN$; adunq. $SR = n \times PN$ e, ricavando PS, SR :: PL, LE. Condotta dunq. pel punto E comune centro di gravità de' punti A, B, C, D, la retta PR, essa sarà la media direzione di tutte le potenze oblique e fatta $PR = n \times PE$, essa sarà l'equivalente di tutte etc.

Corol.º 1.º

e adunq. si produrrà la retta RP, e si prenderà PQ = PR, la sollicitazione espressa dalla retta PQ farà equilibrio colle AP, BP etc.

Corol.º 2.º

E perche il problema ha luogo quantunq. le sollecitazioni non siano tutte nel medesimo piano, nel qual caso in luogo della retta GM P, bisogna intendere i piani, che per esse passano; quindi è che se un punto, o un mobile P sarà spinto (Fig.ª 15) verso una superficie curva ABC dalle sollecitazioni espresse dalla distanza di ciascheduno punto della superficie dal centro del corpo P, la retta che dal centro di gravità del corpo P, passa pel centro commune di gravità C della superficie curva, sarà la media direzione, e l'equivalente a tutte, sarà eguale al prodotto della AP nella superficie curva; imperciocche la stessa superficie curva è appunto il n.º delle sollecitazioni, ed il centro di gravità de' punti estremi di tutte le sollecitazioni.

Problema 2.° Fig.a 36

Date quante sollecitazioni si vogliono obliquamente applicate ad una retta linea rigida, e senza peso considerata, ritrovare la media direzione loro, e la sollecitazione equivalente a tutte.

Sia MP la data verga, AM, BN, CO, DP le sollecitazioni, le quali si risolvono nelle laterali AF, BG, HC, RD parallele ad MP, e nelle FM, GN, HO, KP normali ad essa MP. Le normali possono considerarsi come tanti pesi applicati ne' punti M, N, O, P, de quali sappiamo trovare il comun centro di gravità, che sia E, il quale sarà pure il centro dell'equilibrio. Per E si tiri ER normale ad MP, ed eguale ad MF+NG+OH+PK, indi RS parallela ad MP, ed eguale a DR + CH − BG − AF, supposto che DR + CH prevalgano all'altre; si conduca ES, sarà essa la media direzione, e la sollecitazione cercata.

Imperciocchè ER esprime la somma di tutte le sollecitazioni normali alla verga, e RS essendo eguale all'eccesso delle più forti sopra le più deboli, parlando delle parallele ad MP, esprimerà ella la sollecitazione, che risulta da tutte queste parallele; ma le due ER, RS compongono la forza ES nella direzione ES; dunque sarà ella la ricercata.

Coroll.° p.°

Se producasi SE in T, in modo che sia ES = ET, e nel punto E s'intenda applicata alla verga MP una sollecitazione espressa dalla ET, ogni cosa sarà in equilibrio, e la ET, ossia ES equivale allo sforzo, ossia pressione, che soffre il punto E nella direzione ES dalle potenze AM, BN etc.

Coll.°

Corollo. 2.°

Alle direzioni delle potenze AM, BN ecc. prodotte si conducano le normali Ea, Eb, Ec, Ed dal punto E centro dell'equilibrio, sarà la somma de' momenti delle potenze oblique da una parte del punto E uguale alla somma de' momenti delle potenze oblique dall'altra parte. Imperciocchè essendo E il centro dell'equilibrio, si ha $MF \times ME + NG \times NE = KP \times PE + HO \times OE$: ma per la similitudine de' rispettivi triangoli avremo

$$MF \times ME = MA \times Ea;\ NG \times NE = NB \times Eb;\ OH \times OE = OC \times Ec;\ PK \times PE = PD \times Ed,$$

adunque

$$MA \times Ea + NB \times Eb = OC \times Ec + PD \times Ed.$$

Corollo. 3.° Fig.a 17.a

Se la retta MOP non fosse retta, ma fosse una curva, o fosse composta di molte rette in angolo fra di loro, a cui fossero applicate le sollecitazioni AM, BN, CO, DP, si tiri l'asse EE, indi risolte le sollecitazioni nelle laterali FM, GN & perpendicolari all'asse, ed AF, BG & parallele, si producano le perpendicolari in modo, che sia $EF = FM$; $EG = GN$ &; quindi condotta ER in angolo retto colla EE, e le Mx, Nx & parallele all'asse, ed indefinite, si prenda ciascuna yx eguale alla corrispondente FA, GB &. Al centro comune di gravità, che sia S, delle sollecitazioni EF, EG & si tiri ST ad esse parallela, ed eguale alla loro somma; sarà dunque essa equivalente a quelle, ed in conseguenza eguale alla somma delle FM, GN & che sono state fatte a loro eguali, e direttam.te contrarie. Similm.te condotta yV pel centro di gravità delle sollecitazioni yx, e fatta eguale alla somma d'esse, sarà ella equivalente alla somma di tutte;

le FA, GB &c; adunq. prodotte le Vy, TS, e dal punto I, dove si tagliano, prese IL = yV, IQ = ST', e compito il parallelogrammo, la diagonale I Δ che equivale alle due IL, IQ equivalerà pure a tutte le AM, BN, CO, DP, e sarà I Δ la media direzione; e se prodotta ΔI in a, intenderemo, che a sia un sostegno, soffrirà egli un peso, ossia un urto eguale alla IΔ nella direzione d'essa . . .

Tea.ª 9.ª Fig.ª 18.ª

Se ad un filo, o altra linea perfettam.te flessibile, e considerata senza peso, ed incapace di distrazione saranno applicate quante si vogliono potenze con qualunq. direzione CR, DS, ET, FB in modo, che prenda la figura ACDEFB, dico, che la direzione media passerà necessariam.te pel punto X, in cui s'incontrano i due lati, ossia le due tangenti AC, BF. prolunghiamo AC, ES, e concorrano in G, e sia ab parallela a CD. è manifesto, che i punti A, E soffriranno la medesima forza dalle potenze R, S, essendo esse applicate in C, D, o in a, b con direzioni parallele alle prime, e la media direzione sarà la stessa. Ma ab può essere infinitam.te prossima al punto G nel qual caso le potenze R, S saranno applicate nel punto G colle direzioni GR, GS parallele alle prime, e la media direzione loro sarà la diagonale SQ, che passa per l'angolo AGE. ciò posto in luogo del filo ACDEF teso dalle potenze R, S, T noi possiamo considerare il filo AGEF teso dalle due potenze

Q.

QI, e però prodotta IE in H, la media direzione loro passerà per l'angolo H; e continuandosi il medesimo raziocinio, la media direzione delle potenze R, S, T, P passerà per l'angolo X, il che etc.

Teor.a 5.a Fig.a 19.a

Sia un filo, o verga linea perfettam.te flessibile, e considerata senza peso, ed incapace di distrazione, la quale sia fermata ne punti A, B, a cui sieno applicate in ogni punto le forze RC, SD, TE, PF etc. tali, che ridutto il filo nella curva ACDEFB, sieno ad essa curva perpendicolari: Dico, che la convessità in ciascun punto sarà nella ragione diretta della potenza applicata in quel punto, oppure, che torna lo stesso, il raggio del circolo osculatore di ciascun punto sarà nella ragione reciproca della potenza applicata a quel punto.

Poi, possiamo concepire la curva come un poligono d'infiniti lati infinitam.te piccoli AC, CD etc.; ciò posto per il Teor.a 3.o essendo ogni cosa in equilibrio sarà la forza RC alla forza, con cui è teso il lato CD, come il seno dell'angolo ACI al seno dell'angolo ACY, ossia al seno tutto, poiché essendo la forza RC perpendicolare alla curva, l'angolo ACY è retto; per la stessa ragione sarà la tensione del lato CD alla forza SD, come il seno dell'angolo SDE, cioè come il seno tutto al seno dell'angolo CDG; dunque sarà la forza RC alla forza SD come il seno dell'angolo ACI, al seno dell'angolo CDG, perché

ciò si verifica in ogni punto, sarà generalm.te la forza proporzionale al seno dell'angolo della tangente colla curva, cioè proporzionale ai essi angoli, per essere gli angoli infinitesimi, come i loro seni, ed in conseguenza, il raggio del circolo osculatore sarà nella ragione reciproca della forza.

Coroll.o 1.o

Sia ACDEFB un filo obbligato a prendere la figura curva da una materia per tutto egualm.te elastica, come sarebbe l'aria chiusa nello spazio ACDEFB, la quale egualm.te e perpendicolarm.te in ogni punto fa forza contro il filo per dilatarsi.

Se adunq. la forza in ogni punto è eguale, saranno eguali ora di loro i raggi de' circoli osculatori di ogni punto, ed in conseguenza la curva ACDEFB sarà un circolo; quindi si vede per qual ragione sono rotonde le bolle piene d'aria, che fanno i fanciulli coll'acqua di sapone, e per che sono circa rotonde le vesciche gonfiate coll'aria, ed i muscoli degli animali dilatati da un sottilissimo fluido, a cui si dà il nome di spirito.

Coroll.o 2.o Fig.a 20.a

Sia AFDB la metà della curva di una vela, che riceve il vento nella direzione parallela dell'asse AB, e sia BF = x, FD = y, BD = s. Egli è chiaro, intendendo ogni fluido, quale è anco il vento, composto di minime sferette, che l'urto di esso contro una superficie sarà sempre con direzione perpendicolare a essa, mentre l'urto di ciascuna sferetta sarà nella direzione della retta, che congiunge il centro di essa col punto del contatto alla superficie; e ciò

Fig.a

Teo.ª della risoluzione delle forze, la forza totale del vento alla forza dell'urto contro la superficie sta, come il seno tutto, al seno dell'incidenza; dunq. per questa parte l'urto sarà proporzionale al seno dell'incidenza. Ma il n.° delle sferette, che urtano, è pure proporzionale al suddetto seno, dunq. l'urto totale, e perpendicolare contro la vela è come il quadrato del seno dell'angolo d'incidenza. Fatta dunq. ds costante, e presa per seno totale, sarà dy^2 la pressione del vento contro l'elemento ds della curva. Ma, pel Teo.ª qui sopra, sarà dunq. dy^2, ad $\frac{1}{r}$ in ragione costante, cioè $dy^2, \frac{1}{r} :: ds^2, \frac{1}{a}$; ma supposta ds costante, il raggio osculatore è $\frac{dyds}{ddx}$, dunq. $dy^2, \frac{ddx}{dyds} :: ds^2, \frac{1}{a}$ cioè $dy^3 = a\,ds\,ddx$. Ora se si divide l'uno, e l'altro membro dell'equazione per dy^2, e se si moltiplica per dx, avremo $dx = \frac{a\,ds\,dx\,ddx}{ds^2-dx^2\sqrt{ds^2-dx^2}}$, ed integrando per essere ds costante $x + a = \frac{a\,ds}{\sqrt{ds^2-dx^2}} = \frac{a\,ds}{dy}$, e però sarà $xx+2ax+aa = \frac{aads^2}{dy^2} = \frac{aadx^2}{dy^2} + aa$, e finalm.te $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax+xx}}$, equazione alla vela gonfiata dal vento.

Coroll.° 3.° Fig.ª 20.ª

Sia AB la metà della curva d'un panno, o d'una vela, che fermata nelle estremità H, A contenga un liquore omogeneo e sia AI orizzontale, $AM = x$, $MD = y$, $AS = s$, ed il suo elemento ds si prenda costante. Per li principj d'Idrostatica è certo, che la pressi

one

one di un liquore è sempre nella direzione perpendicola:re alla superficie premuta, e ch'essa pressione è propor:zionale all'altezza del liquore; adunq. la pressione del fluido contro l'elemento della curva è $= y$; onde sarà y ad $\frac{1}{r}$ in ragione costante; cioè $y, \frac{1}{r} :: \frac{1}{2} aa, 1$, ossia $y, \frac{ddx}{dyds} :: \frac{1}{2} aa, 1$, e però $ydyds = \frac{aaddx}{2}$, ed inte:grando $yyds = aadx$, e quadrando sarà $y^4 ds^2 = a^4 dx^2$; cioè $y^4 dx^2 + y^4 dy^2 = a^4 dx^2$, e finalm.te $dx = \frac{yydy}{\sqrt{a^4 - y^4}}$ equazione della curva, che chiamano Lintea.

Problema Fig.a 21.a

Data una catena di egual gravità in tutte le sue parti, e dalla estremità sospesa con due chiodi, si di:manda l'equazione della curva, in cui dovrà essa catena congiorsi aggravata dal proprio peso.

Sia la catena ABC ferma ne punti A, C. è manifesto, che la forza, che esercita, e soffre il punto B sarà la stes:sa, ossia la catena fermata nel punto C, e nel punto F. La potenza che ha ciascun punto della catena è appli:cata è il proprio peso di essa in quel punto, cioè il suo elemento nella direzione verticale, ossia parallela a BD. Adunq. la potenza equivalente a tutte le applicate all'ar:co BF (Probl.a 2.o Coroll.o 3.o) sarà esso arco, e la media di:rezione sarà parallela a BD ma (Teo.a 4.o) condotte le tangenti BG, FG, il punto B soffrirà la medesima forza da tutte le potenze applicate all'arco BF, che soffrirebbe dal peso P, fatto eguale all'arco BF, ed applicato in G con direzione GP parallela a BD. Adunq. fatta $BF = s$, $BE = x$, $EF = y$, sarà (pel Teo.a 3.o) la forza in B, come il seno dell'angolo BGP al seno dell'angolo FGP, cioè, come GI ad IF, cioè

(perchè G7 è tangente), come dx alla dy; ma la forza in B è costante, dunq. s, a :: dx, dy, cioè adx = sdy. Per esprimere questa equazione alle coordinate al solito si rifletta, che essendo $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$, sostituendo in luogo della dy il valore dato dall'equazione della curva; sarà $ds = \frac{dx\sqrt{ss+aa}}{s}$, cioè $\frac{sds}{\sqrt{ss+aa}} = dx$, ed integrando $\sqrt{ss+aa} = x + a$, aggiungendo la necessaria costante, che deve essere a, come è facile a conoscere; adunq. ss = xx + 2ax, ed $s = \sqrt{xx+2ax}$. quindi finalm.te l'equazione sarà $\frac{adx}{\sqrt{xx+2ax}} = dy$, ch'è la stessa della Velaria.

Problema 3.°

Applicazione delle precedenti teoriche al Vette.

Fig.ª 22.ª, 27.ª, 28.ª

Tre casi può avere questo Problema secondo le tre maniere di vette. Il primo caso quando il vette sia tale che nell'una estremità sia la potenza, nell'altra il peso, ed in mezzo l'appoggio. Il secondo quando sia tramezzo il peso. Il terzo q.do sia tramezzo la potenza.

Caso p.° Fig.ª 22.ª Sia il vette ABC orizzontale, al cui punto A, sia applicata la potenza P, [illegible] linea AL; al punto C sia [illegible] il co[illegible] di [illegible], e sieno le direzioni AD CM della potenza e del peso perpendicolari al vette. Se noi intendiamo, che invece della potenza AL sia applicata al punto A con direzione AD [illegible] AD, cioè quello ch'essa necessariam.te [illegible] più meno potrà sostenere senza alcuno aiuto di machina per il Corollario della Prop.ne 4.ª, se sarà [illegible]

In

in A al peso M come CB ad AB, i momenti saranno
uguali, ed ogni cosa sarà in equilibrio: ma egli è lo
stesso, che al punto A sia applicato un peso, o una
equivalente potenza; adunq. avremo l'equilibrio an:
co se sia la potenza AD al peso M, come CB ad AB,
cioè AD X AB = M X CB; cioè i momenti eguali. Quin:
di per poco che sia accresciuta la potenza AD, essa sa:
rà valevole ad alzare il peso M.

Coroll.o p.o

Stando immobile la potenza AD, e supposto che sia AD X
AB = M X CB per poco poco di più, che s'allunghi il vet:
te dalla parte di A, o che s'accorci dalla parte di C, o che
s'allontani il sostegno B dal punto A, la potenza AD
sarà valevole ad alzare il peso M. Quindi allungato il
vette sino in a, ed ivi applicata la potenza, sarà il
momento in a al momento in A :: aB, AB, e però in
questo caso la potenza sarà valevole a sostenere mag:
gior peso, il quale sarà al p.o nella ragione di aB ad
AB. Stia la potenza in A il peso M nel punto C,
sarà il momento del peso M in C al momento del pe:
so M in c, come M X CB a M X cB, cioè come CB
alla cB, e però la potenza potrà reggere un peso in
c, il quale sia al peso M nella ragione inversa delle di:
stanze dal appoggio cioè come CB alla cB.
Stia la potenza nel medesimo punto A il peso M in C ma
si trasporti l'appoggio in b. Sarà il momento dell'una
parte AD X Ab; e dell'altra M X Cb. ora poiché è cre:
sciuto il momento rispetto alla potenza, ed è calato rispet:

to

to al peso, non vi sarà più equilibrio, ma la potenza sarà valevole a sostenere maggior peso. Sia esso $= x$; adunq. $AD \times AG = x \times CG$, cioè $x = \frac{AD \times AG}{CG}$: ma è pure $M = \frac{AD \times AB}{CB}$; adunq. $x, M :: \frac{AG}{CG}, \frac{AB}{CB}$. Sia il peso M di cinq. libre, la potenza $AD = 2$ cioè valevole a sostenere due libre senza ajuto di machina; sia $AB = 10$ palmi, $BC = 4$, $BG = 2$; posto l'appoggio in B, avremo l'equilibrio. Sarà dunq. il peso, che potrà reggersi dalla potenza AD, posto il sostegno in G, al peso M, posto il sostegno in B, come 12 al cinque, cioè sarà $x = 12$.

Coroll.° 2.° Fig.ª 23.ª

Se il vette non fosse orizzontale, ma inclinato come ABC e supposto impegnato nel punto dell'appoggio, ovunque egli sia in modo ch'esso vette non possa scorrere, avranno luogo le medesime regole. Poiche la potenza AD si risolve nelle due, DH parallela al vette, ed HA perpendicolare. La prima nulla opera nel vette, come è noto, benì la seconda e similmente esse del peso, M, che sia per esempio espresso dalla verticale. CQ. ma $CQ, CP :: AD, AH$; dunque è lo stesso, che se il vette fosse orizzontale.

Coroll.° 3.° Fig.ª 24.ª

Se posto il vette orizzontale, fosse inclinata ad esso la direzione della potenza, come AD, si risolverà essa nella parallela DH, e nella perpendicolare HA. La parallela nulla opera, supposto, che il vette non possa scorrere sopra l'appoggio; adunq. la sola perpendicolare opererà. Ma dato la potenza AD, e dato l'angolo

l'inclinazione DAH, sarà pure data AH. Dunque si calcoli essa, come segue nel problema. Lo stesso facciasi del peso, caso che la di lui direzione sia al vette inclinata.

Coroll.° 4.°

Generalm.te siano pure quante potenze, e pesi si voglino applicate al vette in qualunq. distanza, si risolvino quelle, e questi nelle laterali forze, indi si calcoli al solito la somma de' momenti delle potenze perpendicolari al vette colla somma de momenti delle forze de' pesi perpendicolari allo stesso vette, se tutte le potenze sono operanti nello stesso senso; se poi alcune fossero operanti in senso contrario, si calcoli la differenza de' momenti d'esse.

Coroll.° 5.° Fig. 25.a

Sia il vette inflesso ABC, la potenza AP, il peso M, e di q.lla, e di questo sieno, come si vogliono, le direzioni, l'appoggio sia in B. Risolva se fa di bisogno la potenza AP nelle laterali AH normale ad AB, HP parallela, e supposto che CT esprima il peso M, lo stesso si risolva in CT. se sarà AH × BA cioè il momento in A eguale a CV × BC momento in C, sarà l'equilibrio e la potenza AP equivalerà il peso M e un[illegible] in allungato il braccio A, proporzionalm.te crescerà [illegible] della potenza, che sarà valevole a sostenere peso maggiore nella stessa proporzione. Oppure all'altre diminuito BC l'energia della potenza sarà reciprocam.te come [illegible] lunghezza del braccio BC, e nella stessa reciproca proporzione cresceranno i pesi, che potranno sostenersi dalla potenza AP. Sia il vette ABD (Fig.a 26.a) la potenza AL applicata in A, l'appoggio in C, il peso

M

M applicato in B. Risolta la potenza AQ nelle laterali AH normale ad AC, ed AL parallela, il momento della potenza sarà il prodotto di AH nella distanza AC dall'appoggio. Dunque se sarà $AH \times AC = M \times CB$, avremo l'equilibrio.

Caso 2.° Fig.ª 27.ª

Sia il vette ABC la potenza in A, l'appoggio in C e pendente da B il peso M. Il momento della potenza, espressa, per esempio, dalla retta AD, sarà $AD \times AC$; il momento del peso sarà $M \times BC$, quindi avremo l'equilibrio, se siano essi momenti eguali, cioè $AD \times AC = M \times BC$, vale a dire se la potenza sia al peso nella ragione reciproca delle distanze dall'appoggio.

Corollº. primo.

Sia $= x$ la potenza in A, che fa equilibrio al peso M, posto in B. Sarà dunque $x \times AC = M \times CB$. Si prolunghi il vette dalla parte di A in a e l'appoggio dalla parte di C in c, e sia $= z$ la potenza, che starebbe in equilibrio col peso Q posto in B. Sarà dunque $z \times ac = Q \times Bc$. Dunque sarà $x, z :: \frac{M \times CB}{AC}, \frac{Q \times cB}{ac}$. Quindi supposto costante il luogo dell'appoggio, cioè che il punto c cada in C, e però sia $cB = CB$, e supposto costante il peso, cioè $M = Q$, sarà $x, z :: \frac{1}{AC}, \frac{1}{ac}$, cioè le potenze dovranno essere nella ragione inversa delle distanze dall'appoggio. Stante le medesime cose, ma supposta costante la forza e variabile il peso, sarà $\frac{M \times CB}{AC} = \frac{Q \times CB}{ac}$ ossia $\frac{M}{AC} = \frac{Q}{ac}$, cioè i pesi nella ragione diretta delle distanze della potenza dall'appoggio, e però l'energia della leva crescerà nella medesima ragione.

della

Cada il punto a in A e sia costante il peso cioè sia $M = Q$, sarà $x, z :: \frac{CB}{AC}, \frac{cB}{Ac}$, nella ragione composta della diretta delle distanze del peso dall'appoggio, e della inversa della lunghezza del vette; e però poichè è $\frac{BC}{AC}$ minore di $\frac{Bc}{Ac}$, sarà necessaria maggior forza per avere l'equilibrio. Stanti le medesime cose, ma supposta costante la forza e variabile il peso, sarà $\frac{M \times CB}{AC} = \frac{Q \times cB}{Ac}$, ossia $\frac{M \times Ac}{BC} = \frac{Q \times AC}{BC}$, cioè $M, Q :: \frac{AC}{BC}, \frac{Ac}{Bc}$, i pesi nella ragione composta della diretta delle lunghezze del vette, e della inversa delle distanze del peso dall'appoggio, e però essendo $\frac{AC}{BC}$ maggiore di $\frac{Ac}{BC}$, scemerà nella medesima proporzione l'energia della forza.

[illegible] costante la lunghezza del vette AC, e il peso, cioè sia $M = Q$, ma variabile il punto donde è sospeso, che sia in b; sarà $x, z :: \frac{M \times BC}{AC}, \frac{Q \times bC}{AC}$, ossia $x, z :: BC, bC$ cioè le potenze nella ragione delle distanze del peso dall'appoggio. Stanti le medesime cose, ma supposta costante la forza, e variabile il peso, sarà $\frac{M \times BC}{AC} = \frac{Q \times bC}{AC}$, ossia $M, Q :: bC, BC$, cioè i pesi nella ragione inversa delle loro distanze dall'appoggio; e però nella medesima ragione inversa l'energia della forza.

Coroll.o 2.o

Se le direzioni della potenza, e del peso non fossero normali al vette, si risolveranno [illegible] secondo il solito, così pure se le potenze fossero molte, si dovrebbe calcolare la loro o somma, o differenza.

Coroll.o 3.o Fig.a 18.a

Se il vette ABC fosse inclinato, e fisso nel punto [illegible] come appoggio, colla applicata potenza [illegible] risolta [illegible] normale e DO parallela, e lo stesso facendo del peso, sarà ||

l'equilibrio, q.do sia $CO, BH :: AB, AC$. essendo data l'inclinazione del vette, e la potenza, ed il peso, saranno sempre date le CO, BH. Che se in luogo dell'appoggio in A, a cui è impegnato il vette, si sostituirà una potenza, come a dire un uomo, ed un altro si ponga in C, i quali in quella situazione portino il peso M, la pressione, che soffrirà l'uomo posto in C, sarà $= \frac{BH \times AB}{AC}$ nella direzione CO, quella dell'uomo posto in A oltre in direzione sarà $= \frac{BH \times BC}{AC}$, ma l'uomo posto in A oltre la pressione $\frac{BH \times BC}{AC}$ nella direzione AQ normale al vette, bisognerà che resista pure alla forza MN; e però fatta $AQ = \frac{BH \times BC}{AC}$, e $QR = MN$, e condotta la diagonale AR, sarà essa la direzione, e la pressione dell'uomo in A.

Caso 3.° Fig.a 29.a

Sia il vette ABC l'annesso peso al punto A sia M la potenza sia espressa dalla linea BQ applicata al punto B nella direzione BQ l'appoggio in C, a cui sia impegnato il vette. Il momento della potenza BQ sarà $= BQ \times BC$; il momento del peso M sarà $M \times AC$ dunque avremo l'equilibrio, q.do sia $QB \times BC = M \times AC$; cioè $QB, M :: AC, BC$. Da ciò si vede, che questa maniera di vette, non solo non accresce la potenza, ma anzi diminuisce la di lei energia. Si applicano al presente caso i corollarj, ed usi spiegati colle dovute avvertenze, il che noi ommetteremo per essere cosa da se assai aperta, e facile.

Scolio

Scolio

Benchè fino ad ora noi abbiamo mancato di prescindere dall' impedimento della frizione del vette sopra l'appoggio, e da qualunque altra resistenza (il che mostreremo anco per le cose da dirsi in avvenire) abbiamo ancora supposto che sia nullo il peso de' vetti da noi considerati; imperciocchè senza questa supposizione non saranno vere le addotte regole. Che se poi vogliamo considerare i vetti dotati del proprio peso, rispetto a quella parte in cui sta l'appoggio, e la potenza si ritrovi il centro di gravità, indi ivi considerato come unito tutto il peso di quella porzione di vette, si ritrovi il centro comune di gravità di tale peso, e della applicata potenza; [illegible] della potenza, e di un tale peso s'intenda applicata nel punto di esso comune centro di gravità. Della porzione del vette [illegible] parte [illegible] medesimo peso si ritrovi [illegible] il centro di gravità, ed ivi s'intenda collocato tutto il peso di essa porzione di vette, si ritrovi il comun centro di gravità fra esso peso, e il peso pendente dal vette, in esso centro comune di gravità s'intenda applicata la somma del peso della porzione di vette, e del peso pendente; ciò fatto s'istituisca il calcolo [illegible].

Problema 4.° Fig. 30.ª, 31.ª

[illegible] delle stesse [illegible]

Sia la carrucola BCE, a cui sieno applicate due potenze A, B per mezzo della corda ADCB, la resistenza [illegible], il peso sia in P, e prodotte le corde sino al loro concorso in M, si cerca in quali

oro

brio. Poichè le due potenze A, B rispetto al punto C sono avvalorate da egual vette CD, CQ in angoli eguali, perchè vetti, ed operano in senso contrario, egli è lo stesso rispetto alla resistenza, o peso P, che se esse fossero applicate al punto M nelle direzioni AM, BM; e però ogni cosa è in equilibrio, sarà la potenza A eguale alla potenza B, e però la direzione PC prodotta in H, (pel coroll.° 3.° (teor.° 3.°) dividerà in due egualm.te l'angolo AMB. e pel med.o teor.a sarà la resistenza, o peso P alla forza A, come il seno dell'angolo AMB al seno dell'angolo BMH, e sarà pure alla potenza B come il seno del sud.to angolo AMB al seno dell'angolo AMH: ma l'angolo AMH è eguale all'angolo BMH, dunq. la resistenza o peso P sarà a ciascheduna delle potenze A, B, come il seno dell angolo AMB al seno della metà d'esso.

Coroll.° 1. Fig.a 32, 33.a

Se le direzioni delle potenze A, B, non fossero convergenti nella parte verso P, ma verso M, prodotte le corde, starà il concorso M essendo gl'angoli al vertice M eguali, ha luogo la stessa dimostrazione, e però sarà anco in questo caso la resistenza, o peso P a ciascheduna delle due potenze A, B come il seno dell'angolo AMB al seno della metà d'esso angolo.

Coroll.° 2.°

Se in luogo della resistenza, o peso P la carrucola fosse per mezzo d'un chiodo fermata nel muro, o altro

pel centro C, e gli sforzi delle potenze A, B e di equivalenti posti nelle medesime direzioni contro il chiodo in C sarà eguale allo sforzo contro la resistenza, o peso P, e però eguale ad essa resistenza, peso, e la direzione dello sforzo sarà la medesima CH.

Coroll.° 3.° Fig.a 31.a, 33.a

Sia nel punto B raccomandata la fune ad un chiodo immobile, e il tutto sia in equilibrio. Poiché la potenza in A è al peso P, come il seno dell'angolo HMB, o del suo eguale HMA, al seno dell'angolo BMA, la potenza A potrà reggere per mezzo della carrucola immobile un peso maggiore di quello, che reggerebbe senza ajuto di machina, quando è maggiore il seno dell'angolo AMB del seno della metà di esso; cioè nella stessa proporzione viene avvalorata la potenza, ossia il suo momento. E perchè questa ragione de' seni, crescendo l'angolo, sempre si fa minore, si farà pure minore il momento della potenza per modo, che quando l'angolo AMB sia gradi 120, nel qual caso saranno ancora gradi 120 i due angoli AMP, BMP, e però tutti tre eguali, essendo allora la proporzione de' suddetti seni proporzione di eguaglianza dovrà la potenza A essere eguale al peso P, come appare ancora dal Teor.a 3.° Oltre: chè crescendo più di gradi 120 l'angolo AMB, cala il suo seno, e cresce il seno della metà, onde si arriverà finalm.te ad apertura di angolo tale, che ogni minimo peso farà equilibrio colla potenza A. All'incontro calando l'angolo AMB, sempre crescerà la Fig. 24.

la proporzione de' seni, cioè la proporzione del peso alla potenza, e però il momento di essa, e ciò fino a tanto, che l'angolo sia infinitam.te acuto, cioè paralelle le direzioni delle corde AB, BC; ma allora il seno dell'angolo è doppio del seno della metà, adunque il peso potrà essere doppio della potenza, e nulla più. Se adunq. nel punto A (Fig.a 34) intendiamo una carrucola fissa, sopra di cui passi la corda DA, che abbia annesso il peso M metà del peso P, supposte paralelle tra loro le corde, e che nulla sia l'impedim.to della frizione, (da quali impedim.ti intendiamo sempre di prescindere dal peso delle corde, e delle carrucole, il che basterà avere una volta avvertito) starà il peso M in equilibrio col peso P.

Coroll.o 4.o Fig.a 35.a, 36.a

Sia la potenza R applicata alla corda RCG in equilibrio col peso S per mezzo delle carrucole mobili C, B, A applicate ad uno, o muro GFC. Si producano le direzioni delle corde per modo, che due a due concorrino ne' punti L, K, H, sarà il peso S alla forza con cui è retta la carrucola B, come il seno dell'angolo CHK al seno della metà; e questa forza sarà a quella, con cui è retta la carrucola C, come il seno dell'angolo FKL al seno della metà; e questa ultima sarà alla potenza R, come il seno dell'angolo GLP parimente al seno della metà. Adunq. sarà il peso S alla potenza R nella ragione composta de' seni d'essi angoli ai seni delle loro metà, e però come il prodotto d'essi seni al

prodotto

prodotto de' seni delle metà. Quindi se le direzioni delle corde PL, GL, LR, FR &c. saranno parallele, il seno dell'angolo sarà doppio del seno della sua metà, e però fatto =, esso seno dell'angolo, e supposto = n il numero delle carrucole mobili, poiche quante sono le carrucole mobili, tanti sono i seni, sarà il peso alla potenza, come 1 ad $\frac{1}{2^n}$, cioè come 2^n, 1, che equivale alla comune regola, che il peso sarà alla potenza, come l'ultimo termine d'una progressione doppia che abbia un termine di più del numero delle carrucole mobili, al primo termine. In tutti gli altri casi delle corde non parallele avrà sempre la potenza al peso minor ragione.

Coroll.° 5.° Fig.a 37.a

Siano ora più carrucole affisse ad un regolo l'anne:sso peso D la potenza in R, e la fune raccomandata ad un punto fisso M, e sia tutto in equilibrio, essendo im:mobili le carrucole R, OR, NR. S'intendino prodotte le corde, onde concorrano ne' punti A, C, E, e sia il seno dell'angolo A = a, il seno della metà = b; il seno dell'ango:lo C = c, della sua metà = d, il seno dell'angolo E = e, della metà = f. Perche la corda è egualm.te tesa in tut:te le sue parti, le forze ch'essa soffre nei p.ti 2.° e 3° punto R saranno tra loro eguali, e però ciascheduna la chiameremo R. Sia di più = x la porzion del peso D, che reggesi dalla carrucola L, sia = y quella, che reggesi dalla carrucola K, e sia = z quella, che reggesi dalla carrucola [illegible]. Per lo Teor.a 3. sarà x, R :: a, b; R, y :: d, c; e però x, y :: ad, bc, e componendo sarà

sarà x, $x+y$ :: ad, $ad+bc$. sarà pure z, R :: e, f; ma per la prima analogia è R, x :: b, a. adunque z, x :: eb, fa, e però z, $x+y$ :: $eb \times ad$, $\overline{ad+bc} \times fa$; e componendo z, $x+y+z$ :: $eb \times ad$, $\overline{ad+bc} \times fa + eb \times ad$. ma R, z :: f, e; dunq. R, $x+y+z$, cioè R, D :: bdf, $bcf+bde$, cioè la potenza al peso come il prodotto de' seni delle metà degli angoli RAO, RCN è alla somma de' prodotti del seno di ciascheduno d'essi angoli ne' seni delle metà degli altri. Se le corde saranno parallele tra loro, sarà $b = \frac{1}{2} a$, $d = \frac{1}{2} c$, ed $f = \frac{1}{2} e$, e però R, D :: $\frac{ace}{8}$, $\frac{ace}{4} + \frac{ace}{4} + \frac{ace}{4}$ :: $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$ :: 1, 6, cioè la potenza al peso, come l'unità al doppio delle carrucole mobili L, K, H. Nella pratica riesce molto più comodo l'uso delle carrucole combinate nel modo della fig.ª 38.ª

Problema 4.° Fig.ª 36.

Ritrovare la direzione d'una potenza qualunq. ella si sia, acciocchè per mezzo d'una sola carrucola stia in equilibrio con un qualunq. dato peso. La data potenza può essere maggiore, eguale, o minore del dato peso. Sia in primo luogo maggiore, e sia R, il peso sia M. Nella verticale AC indefinitam.te prodotta segno una porzione arbitraria AB, si costruisca il triangolo isoscele ABB, tale, che sia BA, ad AB, come la data potenza R al peso M. In un qualunq. punto C collocata la carrucola, sia la corda TQ parallela ad AB, e fermata in T; la corda QR parallela ad B D; la potenza R applicata alla QR sarà in equilibrio al peso M. [illegible] angolo [illegible]

lati proporzionali a' seni degli angoli opposti, sarà DA ad AB, cioè R, M :: DE, AH. Ma poiché BD è parallela a QR, l'angolo ABD è eguale all'angolo BQR, e pel coroll.° del Teor.ª 3.° eguale all'angolo AQT, adunq. DE è il seno dell'angolo TQM. Parimente per essere TQ parallela ad AD, sarà l'angolo TQP eguale all'angolo ADB, e però AH sarà il seno dell'angolo TQR. Adunq. sarà R, M :: seno dell'angolo TQM, al seno dell'angolo TQR, e però in equilibrio. Se poi la potenza è eguale al peso, si faccia il triangolo ABD equilatero, ed il rimanente come sopra, ed avremo l'equilibrio, com'è evidente pel citato corollario.

Sia la potenza R minore del peso M. Sulla retta BA (Fig.ª 39) si descriva il triangolo isoscele tale, che fatta AB = AD, sia AB, BD :: M, R. Si conduca la corda IT parallela ad AD, e si fermi in T; di più la corda IR impegnata nella carrucola, parallela a AB, e si applichi la potenza R, avremo l'equilibrio. Imperciocché condotto AH seno dell'angolo ADB, e BE, seno dell'angolo BAD, sarà R, M :: BE, AH. Ma essendo QT parallela ad AD, sarà l'angolo AQT eguale all'angolo DAB, e però BE seno dell'angolo MIT; così pure condotta QP parallela ad IR, sarà l'angolo TQP eguale all'angolo ADB, e però AH seno dell'angolo TQP; dunq. R ad M, come il seno dell'angolo TQA (complemento dell'angolo fatto dalla corda TI, e dalla direzione IM del peso) il seno dell'angolo TQP (complemento dell'angolo ~~stesso~~ fatto dalla TI, e dalla direzione della potenza) e però l'equilibrio.

Abbiamo

Problema 5.° Fig.e 40.a 42.a

Applicazione delle Teoriche alle Superficie.

Sia la superficie HOG, sopra di cui il corpo A in equilibrio colla potenza R nella direzione ER, e sia F il centro di gravità del corpo; per F si conduca la verticale indefinita NAFC, e si produca RE, la quale necessariamente incontrerà in qualche punto, per esempio A la detta verticale; imperciocchè se esse fossero parallele il centro di gravità F potrebbe discendere, contro il supposto dell'equilibrio. Dal punto A si conduca ACD perpendicolare alla superficie: essa necessariamente passerà per la base del corpo con cui tocca la superficie; imperciocchè essa perpendicolare deve essere la direzione della forza, che si compone della potenza R, e del peso, la quale se non fosse perpendicolare alla superficie, il corpo da essa sarebbe mosso alla parte dove inclina, contro l'ipotesi; ma s'essa è perpendicolare, deve altresì cadere nella base, perchè altrimenti il corpo sarebbe pure da essa mosso, contro l'ipotesi. Ciò posto, sia AC proporzionale al peso totale del corpo, il qual peso sia = A, e sia CB normale ad AB. La forza AC si risolve nelle due CB, AB, ma AB tutta aggrava la superficie. Dunq. la sola CB è quella, a cui resiste la potenza R. Fatta AM parallela a CB, avremo dunq. la forza per AM, cioè $\frac{A \times CB}{AC}$ ad R, come il seno dell'angolo RAS, al seno dell'angolo MAS, retto cioè al seno tutto e presa la [illegible] seno tutto, sarà R = $\frac{A \times CB}{[illegible]}$, [illegible] RAS e [illegible] R X [illegible] golo RAS = A X CB, cioè [illegible] [illegible] RAS [illegible], cioè il peso del corpo [illegible] ragione.

ragione reciproca de' seni degli angoli, che fanno le loro direzio:ni colla normale alla superficie tirata dal punto A del loro concorso.

Corollo. 1°

Poiche ogni cosa è in equilibrio, e la pressione, che soffre la superficie HOG è nella direzione AD chiamata x essa pressione, sarà per il Teor.a 3°. il peso del corpo, cioè A ad x, come il seno dell'angolo RAD al seno dell'angolo RAC, ed x ad R, come il seno dell'angolo RAC al seno dell'angolo DAC e però il peso del corpo, la ~~superficie~~ [illegible] sulla superficie, e la potenza R saranno nella ragione de' seni degli angoli RAD, RAC, DAC. quindi quanto più sarà ottuso l'angolo RAC, o sia acuto RAX, sarà sempre minore la pressione della superficie di modo che potendo all'infinito diminuirsi l'angolo, all'infinito si diminuirà la pressione, e quando l'angolo RAX sia nullo, nulla sarà la pressione, e converrà, che la potenza R eguagli il peso. Per contro facendosi in infinito acuto l'angolo RAC, crescerà in infinito la pressione, perche quando esso RAC sia infinitam.e acuto RA, AC cadevanno in AD e la pressione sarà A+R, e la AD verticale, che se dunque la superficie HG è un piano, sarà esso orizontale.

Corollo. 2°

Se in luogo della potenza R applicaremo alla fune AR per mezzo d'una carrucola il peso P ad essa potenza R equivalente, sarà il medesimo peso P al peso A nella medesima proporzione della potenza.

Ommetto moltissimi altri corollarj spettanti alla variazio:ne delle direzioni della potenza, della inclinazione delle superficie, e [illegible] con una anche menoma consi:derazione si deducono dalla ragione generale.

Ordinan. 2°

Problema 6.° Fig.ª 44.ª
Applicazione delle teoriche alla Vite.

Sia SM il maschio della vite, e nella madrevite QP sia la madre vite libera a moversi, e fisso il maschio. Qui è evidente che la madrevite QP considerata col suo peso, o con altro peso aggiunto, ossia forza in essa operante, scenderà giù per la spirale HAG nel modo, che discende giù un grave per il piano inclinato, perciocchè acciò stia in ~~equilibrio~~ quiete, o sia in equilibrio, sarà necessaria una qualche potenza. Sia questa potenza applicata al punto A nella direzione AB, e poichè nel punto A possiamo considerare come unito tutto il peso, o forza da cui è spinta verticalm.te la madrevite, la direzione di essa sarà AC parallela all'asse MS. Sia AB perpendicolare in A alla proiezione della spirale GAH, e si compisca il parallelogrammo BC. Pel corollario 1.° del Problema 5.° la potenza in A sarà in equilibrio col peso, o forza della madrevite, quando sia essa potenza al suo peso, o forza nella ragione del seno dell'angolo DAC al seno dell'angolo BAD, cioè come AB a BD. e per la similitudine de' triangoli ABD, AFG, come HF alla semiperiferia FG, ossia come HK a tutta la periferia. Ma la potenza applicata in A nella direzione AB è ad un'altra potenza applicata in T della direzione parallela ad AB per mezzo della vette IT perpendicolare ad AB, e nel piano QP, il cui sostegno, o appoggio è nel punto I dell'asse MS, onde sia in equilibrio col medesimo peso, è come IT al raggio del circolo GF, ed invertendo la potenza in T è alla potenza in A come la periferia GF alla periferia del raggio IT e però il peso sarà alla potenza in T, alla rag-

ne composta della ragione del peso alla potenza in A, e della potenza in A alla potenza in T, cioè come la periferia del raggio IT ad HK.

Se fosse mobile il maschio della vite e fissa la tavola QP, s'intenda il punto A non nella tavola, ma nella spirale del cilindro, e serve la stessa dimostrazione.

Corollº.

Quindi ne viene, che quanto più strette saranno le spire maggiore sarà l'energia della potenza rispetto al peso, o forza da superarsi; e così pure quanto più sia lontano dall'asse MS il punto T, a cui applicasi la potenza.

In altra maniera.

Per tempo che la potenza in T descrive la periferia del raggio IT, il punto A, sia esso nella vite maschio considerato o nella femmina, secondo che o questo, o quello si move, sarà salito nel punto O, e sarà AO = KH; e perchè il moto è equabile, saranno le velocità come gli spazj. Adunq. per avere l'equilibrio dovrà essere il peso, o forza considerata in A alla potenza in T, come la velocità della potenza T alla velocità del punto A, cioè come la periferia del raggio IT ad HK.

Scolio.

Ometto il trattare di molti altri strumenti meccanici, come della [illegible], [illegible], taglia, dell'Asse nella ruota semplice, e composto, del martello con una parte biforcata per spiccare i chiodi, delle Tanaglie, delle Forbici delle Cicogne per cavar acqua in pozzi di campagna, delle Ruote, e [illegible], che ordinariamente facilmente si riducono al vette. Quanto al Cuneo senza [illegible] in alcuna delle spiegate macchine

fig. 44

machine è cosa per se assai facile. Sia il cuneo ABV, in cui vogliasi spaccare il corpo FG per mezzo della percossa della mazza E. Il cuneo non potrà moversi, ed insinuarsi nel corpo per uno spazio infinitesimo IB (fig.a 44) se le parti del corpo non cederanno descrivendo gli spazj ID, IH. Sarà adunque la velocità del cuneo alla velocità delle parti del corpo spaccato, come IB a IH; adunque il momento della forza sarà essa forza moltiplicata in IB, ed il momento della resistenza sarà la resistenza moltiplicata in IH, e però averemo l'equilibrio, se sarà la forza alla resistenza, come IH a IB, ossia come AV a PB. [illegible] che sia [illegible] forza, sarà valevole a spaccare il corpo. 8.

Cap. V.

De' Pendoli

Definizioni Fig.a 1.a

1.a Se un corpo qualunque B sarà appeso ad una verga, o filo AB attaccato al punto fisso A in modo che scostato dalla verticale AB, e lasciato in libertà egli cada da B in [illegible], ed ascenda in b chiamerassi pendolo.

2.a [illegible] BD e la salita nel Db prese assieme chiamerassi una oscillazione del pendolo, e quando noi in avvenire [illegible] poremo [illegible] nel vacuo, e supporremo ancora, che [illegible] la frizione attorno al punto A come [illegible] [illegible] [illegible] ed il corpo sarà da noi considerato, quanto all'estensione, come un sol punto.

3.a Se il pendolo averà appeso un sol corpo, dirassi pendolo semplice. Se averà appesi più corpi dirassi pendolo composto.

4.a Asse di oscillazione è quella retta linea, che passa pel punto di sospensione del pendolo e [illegible] al piano, in cui esso pendolo si muove.

8ª Asse del pendolo composto è quella retta linea, che condotta dal punto di sospensione passa pel centro comune di gravità di tutte le parti del pendolo composto.

9ª Due pendoli si dicono sincroni, oppure isocroni allora quando posti nella medesima orizzontale oppure in eguale inclinazione colla orizzontale e lasciati in libertà descriveranno cadendo, angoli eguali, ossia archi simili in tempi eguali, ed in conseguenza l'intera oscillazione di uno si farà nel medesimo tempo dell'intera oscillazione dell'altro.

10ª Centro di oscillazione si chiama quel punto preso nell'asse del pendolo composto, il quale sia distante dal punto di sospensione, quanto sarebbe lungo un pendolo semplice isocrono al composto.

11ª Se il pendolo composto CBQ (Fig. 2.ª) di cui è verghe CB, CQ, BQ sieno rigide, o senza peso oscillerà attorno al punto C fra gli infiniti punti nell'asse CM, ve ne sarà uno, come per esempio M, in cui urtando come contro un ostacolo la verga BQ nel moversi del pendolo, farà essa maggior percossa, che contro qualunque altro. Questo punto si chiama centro della percossa.

Problema p.° Fig.ª 3ª

Posti due pendoli semplici AB, AD nella medesima orizzontale, o in qualunque altra retta egualmente all'orizzontale inclinata e lasciati cadere, si cerca la proporzione della velocità dei tempi delle oscillazioni loro.

Sia F, f le gravitazioni assolute, che supponiamo costanti; m, M le masse, AB = a; AD = A lunghezze de' pendoli. Poichè i tempi ... chiamiamo t e T ... durazioni

zioni tangenziali nella medesima proporzione delle assolute, perchè sono simili i triangoli Hmn, Gab, onde si possono prendere queste per quelle. Sieno gli archi minimi $Gg = ds$, $Hh = dS$. Sarà dunq. $fds = mudu$. $FdS = MVdV$, e però $fds, FdS :: mudu, MVdV$, ed integrando $\int fds, \int FdS ::$ muu, MVV. ma gli archetti minimi ds, dS sono proporzionali ai raggi a, A; dunq. $fa, FA :: muu, MVV$; cioè $\frac{fa}{m}, \frac{FA}{M} :: uu, VV$. ora poichè $u = \frac{ds}{dt}$, e $V = \frac{dS}{dT}$, cioè $u = \frac{a}{dt}$, $V = \frac{A}{dT}$, sostituendo sarà $\frac{fa}{m}, \frac{FA}{M} :: \frac{aa}{dt^2}, \frac{AA}{dT^2}$ ossia $dt^2, dT^2 :: \frac{am}{f}, \frac{AM}{F}$, e per conseguenza $dt, dT ::$ $\frac{\sqrt{a}\sqrt{m}}{\sqrt{f}}, \frac{\sqrt{A}\sqrt{M}}{\sqrt{F}}$ e finalm.te $t, T :: \frac{\sqrt{a}\sqrt{m}}{\sqrt{f}}, \frac{\sqrt{A}\sqrt{M}}{\sqrt{F}}$. Saranno dunq. i tempi delle oscillazioni in ragione composta della dimidiata delle masse, e delle lunghezze de' pendoli diret tam.te ed inversa delle sollecitazioni, o pesi.

Coroll.o primo.

Sia $a = A$, cioè le lunghezze eguali de' pendoli, avremo $t, T :: \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{f}}, \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{F}}$ cioè i tempi nella ragione composta della dimidiata diretta delle masse, e della dimidiata inversa de' pesi. E le masse, ossia quantità di materia saranno nella ragione composta della semplice de' pesi, e della duplicata de' tempi. poichè sarà $\sqrt{m}, \sqrt{M} :: \sqrt{f}, \sqrt{F}$, cioè i pesi proporzionali alle masse. E se sia $f = F$, sarà pure $\sqrt{m}, \sqrt{M} :: t, T$, cioè le masse nella duplicata de' tempi. E se sia $m = M$, sarà $t\sqrt{f} = T\sqrt{F}$, cioè i pesi nella duplicata reciproca de' tempi.

Coroll.o 2.o

Sia $t = T$, cioè i tempi eguali, sarà $\frac{am}{f} = \frac{AM}{F}$, ossia $a, A :: \frac{f}{m}, \frac{F}{M}$. Saranno dunq. isocroni i pendoli, qu.do sia la lunghezza dell' uno a quella dell' altro nella proporzione de' pesi divisi per le masse.

Coroll.o 3.o

Sia $m = M$ cioè le masse eguali sarà $t, T :: \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{f}}, \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{F}}$, e però saranno eguali i tempi, ossia isocroni i pendoli, qu.do sieno le lunghezze d'essi proporzionali alle sollecitazioni, o pesi

Coroll.o 4.o

Corollo 4°.

Se $f = F$, cioè i pesi eguali, sarà $t, T :: \sqrt{a}\sqrt{m}, \sqrt{A}\sqrt{M}$, e però saranno isocroni i pendoli, quando sieno le lunghezze nella ragione inversa delle masse.

Corollo 5°.

Sia $f, F :: a, A$, cioè le sollecitazioni proporzionali alle lunghezze, sarà $t, T :: \sqrt{m}, \sqrt{M}$, cioè i tempi nella ragione dimidiata delle masse, e se saranno di più eguali le masse saranno isocroni i pendoli.

Corollo 6°.

E poiche il numero delle oscillazioni che da un pendolo si compiscono in dato tempo, è al numero delle oscillazioni di un altro pendolo, compite nel medesimo tempo nella ragione inversa de' tempi di ciascuna oscillazione dell'uno, e dell'altro pendolo: (il che da se è abbastanza chiaro) cioè $n, N :: \frac{1}{t}, \frac{1}{T}$ (essendo n, N i numeri di esse oscillazioni) se in luogo di t, T sostituiremo i suoi valori $\frac{\sqrt{a}\sqrt{m}}{\sqrt{f}}, \frac{\sqrt{A}\sqrt{M}}{\sqrt{F}}$, sarà $n, N :: \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{a}\sqrt{m}}, \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{A}\sqrt{M}}$, cioè essi numeri nella ragione composta della diretta dimidiata de' pesi, e delle reciproche dimidiate delle lunghezze, e delle masse. Quindi tanti altri corollarj si ponno dedurre, quante sono le diverse combinazioni, che si ponno fare delle [illegible], cioè $a, A; f, F; m, M; t, T; n, N$, che noi ommettiamo per brevità.

Scolio

È manifesto per l'esperienza, che se due pendoli di eguale lunghezza si muovono nella machina del Boile, dove o nulla, o minima è la resistenza dell'aria, quantunque abbiano attaccati non solo pesi ineguali, ma di diversa materia ancora, come uno di legno, e l'altro di ferro, faranno però sempre vibrazioni fra loro eguali in [illegible]. Ciò posto riguardo la nostra formula $t, T :: \frac{\sqrt{a}\sqrt{m}}{\sqrt{f}}, \frac{\sqrt{A}\sqrt{M}}{\sqrt{F}}$, poiche per conseguenza $t = T$ ed $a = A$, come supponiamo, sarà $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{F}}$, cioè i pesi de' corpi sono proporzionali alle masse [illegible] sarà [illegible] sempre in [illegible].

in avvenire supposto, di modo che senza farne altra parola intenderemo che i pesi siano sempre proporzionali alle masse.

Posto questo teorema, adunque la formula nostra applicata a pendoli comuni sarà $t, T :: \sqrt{a}, \sqrt{A}$, ed $u, V :: \sqrt{a}, \sqrt{A}$, cioè le velocità, ed i tempi nella ragione dimidiata delle lunghezze, il che è conforme all'esperienza; imperciocchè paragonati due pendoli uno de quali sia quadruplo dell'altro, il tempo, e la velocità dell'uno saranno doppi del tempo, e velocità dell'altro.

E però poichè esse lunghezze sono tra di loro come gli archi simili descritti da pendoli, saranno i quadrati delle velocità e de tempi, come gli archi ossia come gli spazj trascorsi.

La formula pure del Cor. 1.° si muterà in questa $n, N :: \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{A}}$ cioè il numero delle vibrazioni nella ragione inversa dimidiata delle lunghezze. E perchè $t, T :: u, V :: \sqrt{a}, \sqrt{A}$, sarà $n, N :: \frac{1}{t}, \frac{1}{T} :: \frac{1}{u}, \frac{1}{V}$.

Ritrovata la formula $n, N :: \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{A}}$ è facile sciorre i due seguenti Problemi.

I° Data la lunghezza di un pendolo, e dato il n.° delle vibrazioni ch'egli fa in un dato tempo, ritrovare la lunghezza di un altro pendolo, che nel medesimo tempo faccia un altro dato numero di vibrazioni. Siano n, N i numeri delle ~~vibrazioni~~ oscillazioni, la lunghezza del dato pendolo sia $= a$, la ricercata $= z$. adunque $n, N :: \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{z}}$, ed $nn, NN :: \frac{1}{a}, \frac{1}{z}$, e però $NN, nn :: a, z$: onde il quarto proporzionale del quadrato del numero delle oscillazioni del pendolo ricercato, e del quadrato del numero delle oscillazioni del primo e della lunghezza del primo, sarà la lunghezza ricercata del secondo. Onde poichè il pendolo lungo piedi 3, linee 8 $\frac{1}{2}$ fa 60 oscillazioni in un minuto [illegible] d'ora, si potrà avere la lunghezza di quello che le compia in quel tempo, che più piace.

2° Dato

2°. Dato il n.° delle oscillazioni, che un dato pendolo compie in un determinato tempo, ritrovare il n.° delle oscillazioni, che nel med.° tempo compirà un'altro dato pendolo.

Siano i dati pendoli a, A il n.° delle oscillazioni del primo = n, del 2.do = z; adunq. nn, zz :: $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{A}$, e però A, a :: nn, zz, onde il quarto proporzionale alle lunghezze del secondo pendolo, e del primo, e del quadrato delle oscillazioni del primo sarà il quadrato delle oscillazioni del secondo, e la radice quadrata il numero quesito.

Altri problemi si potrebbero facilm.te sciorre, che ommetto per brevità. Ommetto pure di dimostrare che la velocità del pendolo nel punto infimo della sua caduta sarà alla sua velocità, che avrebbe acquistata naturalm.te cadendo da altezza doppia di esso pendolo, quella proporzione, che ha la corda dell'arco descritto alla doppia lunghezza di esso pendolo. Come pure, che il pendolo arrivato al punto infimo animato dalla velocità acquistata ascenderà per altrettanto arco, quanto fu quello per cui discese, e così di mano in mano reciprocherà in perpetuo le sue vibrazioni per archi eguali in tempi eguali; poiche tutte queste cose già si sono dimostrate, o almeno facilm.te si ponno dedurre dal luogo, dove abbiamo trattato del moto de' corpi. Il che però sarà vero solam.te supposto il moto de' pendoli nel vacuo, e che la frizione attorno al punto di sospensione sia nulla. Che se poi vogliamo supporre l'attrizione, ed il moto nel mezzo resistente, non ascenderà il pendolo ad altrettanta altezza, da quanta cadette, ma sempre un poco meno, per modo che finalm.te si ridurrà alla quiete.

Problema

Problema 2.° Fig.a 4.a

Ritrovare un pendolo, le di cui oscillazioni per archi disuguali si facciano tutte in tempo eguale; cioè sieno isocrone, e determinare questo tempo.

Sieno due semicicloidi AB, AD ed i diametri de' loro circoli generatori sieno eguali alla metà della lunghezza del pendolo; fra esse nel punto A sia sospeso il pendolo in modo, che oscillando, sopra esse s'avvolga, e sia sempre tangente in un punto. Si sa per il metodo delle evolute, che il centro del peso C descriverà la cicloide BCD; e si sà, pure per le teoriche del moto, che le cadute per gli archi infimi di cicloide, quantunque disuguali sono sempre isocrone; dunque il pendolo così costruito sarà il ricercato. Quanto al tempo si sa pure per le suddette teoriche del moto, che il tempo di una caduta, e salita per qualunque arco infimo di cicloide è al tempo della caduta libera per lo diametro del circolo generatore di essa, come la periferia del circolo al diametro. Dunque sarà determinato il tempo ricercato.

Sia il pendolo nel sito verticale AH, sarà esso, come è noto, il raggio del circolo osculatore, il quale combacia, e si confonde con una minima porzione di cicloide. Dunque ancora le oscillazioni circolari de' pendoli comuni saranno sensibilmente isocrone, quando sieno minimi gli archi, e più lo saranno quanto più lungo sarà il pendolo e piccolo l'arco.

Problema 3.° Fig.a 5.a

Dato il pendolo composto CBL determinare rispetto alla situazione de' corpi [illegible] la opera nel corpo B quando questo opera in [illegible], o [illegible] questo circa all'avvalorare il moto.

Sia

Sia C il centro di rotazione, le verghe CB, CQ, BQ si suppongono rigide, e senza gravità. Sia CH orizontale, BH, QS ad essa perpendicolari, prodotte le quali, esprima BD il peso del corpo B, e sia esso peso, cioè BD = F; QO esprima il peso del corpo Q, e sia = f; indi condotte BK perpendicolare a BC, DK parallela; QI perpendicolare a QC, OI parallela, le BK, QI esprimeranno le forze accelleranti de' corpi B, Q; quindi posta CS = a, CH = b, sarà $QI = \frac{af}{QC}$, $BK = \frac{bF}{BC}$. Ciò posto acciocchè un peso nell'oscillare [illegible], bisogna che considerati i due pendoli BC, QC in figura di semplici, sieno collocati in maniera che i corpi B, Q nel principio della loro caduta debbano in tempi minimi eguali scorrere archi infinitesimi proporzionali alle distanze BC, QC, e conseguentemente acquistare nella stessa ragione le prime inassegnabili velocità. Sieno T, V, M il tempo, velocità, e massa del corpo B; t, u, m del corpo Q: usando una delle note formule, sarà $F dT = M dV$, $f dt = m du$, ma perchè deve essere $dT = dt$, e $dV, du ::$ BC, QC avremo $F, f :: M \cdot BC, m \cdot QC$, e sostituite le [illegible] accelleranti in luogo di F, ed f sarà $\frac{bF}{BC}$, $\frac{af}{QC} :: M \cdot BC, m \cdot QC$; ma poichè i pesi sono proporzionali alle masse [illegible] $F, f :: M, m$ [illegible] b (CH), a (CS) :: $\overline{BC}^2$, $\overline{QC}^2$, [illegible] conviene al circolo. Per tanto [illegible] lunque [illegible] bisogna, e segna essa come diametro, descritto il circolo, [illegible] per punto C, [illegible] centro di gravità del corpo B, deve egli ancora passare [illegible] centro di gravità del ~~punto~~ corpo Q, e [illegible] nell'altro, e questa sarà la curva, in cui vibrandosi i centri di gravità di quanti pesi si vogliono, la rispettiva [illegible] di ciascheduno [illegible] sarà sempre nulla. Cordl. [illegible]

Coroll.° p.°

Quindi è, che se il centro di gravità del grave Q sarà dentro il detto circolo, come in H, allora il grave [illegible] opererà nel grave B, imperciocchè considerati come semplici i due pendoli CQ, CA se le loro velocità fossero proporzionali alle lunghezze, l'uno nulla agirebbe nell'altro; ma essendo nella ragione di $\sqrt{CQ}$, $\sqrt{CH}$, il pendolo CH opererà nel pendolo CQ ed in conseguenza nell'altro pendolo CB. Lo stesso è vero, ma preso in senso contrario si vede, che se il centro di gravità del corpo Q cadrà fuori del circolo, il corpo B opererà nel corpo Q.

Coroll.° 2°.

Se il pendolo oltre i due corpi B, Q, ne avrà un altro A dalla opposta parte del centro di rotazione, avranno pure luogo i medesimi due casi. Imperciocchè si faccia Q : A :: CC, C7, e si conduca 7H, ed il peso A colla distanza CA sieno tali, che nonostante il pendolo si muova da B verso Q. Ciò posto se il centro di gravità del peso Q cade nella periferia del circolo, egli è manifesto, che il peso B agirà nel peso Q; poichè se in questo caso l'un corpo non opera nell'altro non essendovi il braccio CA, che ritarda il moto del braccio CQ; dunque ritardato il moto di CQ dal braccio CA, agirà B in Q; ed a più forte ragione se il centro di gravità di Q caderà fuori del circolo.

Se poi il peso Q fosse in H, come che allora, non considerato il peso B, A, ed H sarebbero in equilibrio, aggiunto il peso B, egli agirà nel peso H; ed a più forte ragione, se Q caderà fra H e C, poichè si suppone che il pendolo debba muoversi da B verso Q. Dico che se [illegible] tra la periferia ed il punto H [illegible] essendo [illegible] il peso Q, egli [illegible] peso B oppure [illegible] un peso nulla opera nell'altro.

Proposizione 4.

Problema 4° Fig.a 6.a

Dato un pendolo composto trovare il centro di oscillazione, ossia la lunghezza del pendolo semplice isocrono al dato composto. Sia il pendolo BQA, gli appesi corpi B, Q da una parte, A dall'altra del centro di rotazione C. Sia VK orizzontale, e BH, QS, AV ad essa perpendicolari. Prodotte in I, ed O le HB, SQ, esprimano le BI, QO, AV le sollecitazioni totali, ossia i pesi de' corpi, onde condotta IH parallela a BC, ed HB perpendicolare, come pure OI parallela a QC, IQ perpendicolare, ed Ve perpendicolare ad AC, le sollecitazioni tangenziali, ossia operanti saranno BH, QI, Ve, ed è $BH = \frac{B \cdot CH}{BC}$; $QI = \frac{Q \cdot CS}{QC}$; $Ve = \frac{A \cdot CV}{AC}$.

Sia in primo luogo il caso in cui il corpo Q opera nel corpo B. In questo caso parte della sollecitazione tangenziale del peso Q si spende nel superare la sollecitazione tangenziale del peso A, parte nel communicare il moto al corpo A, parte nel produrre il moto nel corpo Q, e la rimanente agirà nel corpo B. Quella che si spende nel vincere la sollecitazione tangenziale del peso A sarà $= \frac{A \cdot CV}{QC}$; quella che si spende a comunicare il moto al corpo A, sia $= z$; quella che si spende a produrre il moto nel corpo Q, sia $= x$. Ora considero che la forza d'inerzia del corpo A ad essere mosso è nella ragione composta della diretta della massa A, e della distanza AC, e della inversa di QC, e però in questo caso si deve computare la massa A, come $\frac{A \cdot AC}{QC}$; quindi chiamando dt, du l'elemento del tempo, e della velocità del corpo Q; dT dV del corpo A, sarà per le note formole $x\,dt, z\,dT :: Q\,du, \frac{A \cdot AC}{QC} \cdot dV$, ed essendo le velocità come

come le distanze, ed eguali i tempi, sarà $x, z :: q \cdot Cq, \frac{A \cdot \overline{AC}^2}{Cq}$ cioè $z = \frac{x \cdot A \cdot \overline{AC}^2}{q \cdot \overline{qC}^2}$. Pertanto il rimanente della sollecitazione tangenziale del corpo q sarà $\frac{q \cdot CS}{qC} - A \cdot CV - x - \frac{x \cdot A \cdot \overline{AC}^2}{q \cdot \overline{qC}^2}$, che ridotta al comun denominatore, sarà $= \frac{q^2 Cq \cdot CS - A \cdot q \cdot Cq \cdot CV - x \cdot q \cdot \overline{Cq}^2 - x \cdot A \cdot \overline{AC}^2}{q \cdot \overline{Cq}^2}$.

Considerando dunque CqB come un vette, il di cui punto C sia il sostegno, q il peso, che agisca nella direzione qI, e la potenza sia in B, oppure in P, fatta BP perpendicolare a Cq prodotta, e facendo l'analogia $PC, Cq :: \frac{q^2 Cq \cdot CS - A \cdot q \cdot Cq \cdot CV - x \cdot q \cdot \overline{Cq}^2 - x \cdot A \cdot \overline{AC}^2}{q \cdot \overline{Cq}^2}$ al quarto, cioè $\frac{q^2 Cq \cdot CS - A \cdot q \cdot Cq \cdot CV - x \cdot q \cdot \overline{Cq}^2 - x \cdot A \cdot \overline{AC}^2}{q \cdot Cq \cdot CP}$ esso quarto proporzionale esprimerà per le leggi meccaniche, la sollecitazione, che al corpo in P, ossia B si communica nella direzione BP, onde condotta PR perpendicolare a B nella direzione BP, onde condotta PR perpendicolare alla ... per la similitudine dei triangoli BPR, CBP, sarà $\frac{q^2 Cq \cdot CS - A \cdot q \cdot Cq \cdot CV - x \cdot q \cdot \overline{Cq}^2 - x \cdot A \cdot \overline{AC}^2}{q \cdot Cq \cdot CB}$ quella che si comunica nella direzione PR, a cui aggiunta la sollecitazione tangenziale propria del corpo B avremo la sollecitazione totale $\frac{q^2 Cq \cdot CS - A \cdot q \cdot Cq \cdot CV - x \cdot q \cdot \overline{Cq}^2 - x \cdot A \cdot \overline{AC}^2 + B \cdot q \cdot CB \cdot \ldots}{q \cdot Cq \cdot CB}$

Abbiamo poi nel teorema , come questa sollecitazione moltiplicata nell'elemento del tempo, il prodotto ... dia

della massa B nell'elemento della sua velocità, così a sollecitazione x nell'elemento del tempo al prodotto della massa q nell'elemento della sua velocità; ma perchè i tempi sono eguali, e le velocità come le distanze, avremo.

$$\frac{q^2 q\cdot CS - A\cdot q\cdot Cq\cdot CV - x\cdot q\cdot \overline{Cq}^2 - x\cdot A\cdot \overline{AC}^2 + B\cdot q\cdot CN\cdot Cq}{q\cdot Cq\cdot CB},\ x :: B\cdot BC,\ q\cdot Cq;$$

e però

$$x = \frac{q^2 Cq\cdot CS + B\cdot q\cdot Cq\cdot CN - A\cdot q\cdot Cq\cdot CV}{B\cdot \overline{CB}^2 + q\cdot \overline{Cq}^2 + A\cdot \overline{CA}^2}$$

Ciò posto sia CG la lunghezza cercata del pendolo semplice isocrono al composto, il quale passi per lo punto M centro di gravità comune de' corpi B, q, A, e sia dell'annesso corpo la massa [illegible] G espresso dalla verticale Gm, che risolvendosi nelle due mn, Gn, la tangenziale sola produrrà il moto, e per la similitudine de' triangoli Gmn, CGK, si troverà essere $= \frac{G\cdot CK}{CG}$. Adunque questa forza moltiplicata nell'elemento del tempo starà al prodotto della massa nell'elemento della rispettiva velocità come la forza x nell'elemento del tempo al prodotto della massa q nell'elemento della respettiva velocità; ma i tempi sono eguali, e le velocità come le distanze; adunque

$$\frac{G\cdot CK}{CG},\ \frac{q^2 Cq\cdot CS + B\cdot q\cdot Cq\cdot CN - A\cdot q\cdot Cq\cdot CV}{B\cdot \overline{CB}^2 + q\cdot \overline{Cq}^2 + A\cdot \overline{CA}^2} :: G\cdot CG,\ q\cdot Cq,$$

e finalmente sarà

$$\overline{CG}^2 = CK \times \frac{B\cdot \overline{CB}^2 + q\cdot \overline{Cq}^2 + A\cdot \overline{CA}^2}{B\cdot CN + q\cdot CS - A\cdot CV}$$

ma per la similitudine de' triangoli CKG, CNT, CSy, CVz, sarà $CK = \frac{CN\cdot CG}{CT}$; $CS = \frac{CN\cdot Cy}{CT}$; $CV = \frac{CN\cdot Cz}{CT}$ ora sostituiti questi valori sarà finalmente

$$CG = \frac{B\cdot \overline{CB}^2 + q\cdot \overline{Cq}^2 + A\cdot \overline{CA}^2}{B\cdot CB + q\cdot Cy - A\cdot Cz}$$

Caso 2°.

Sia ora il caso, in cui il peso B opera nel peso Q. Io m' imagino liberam.te che CQB sia un vette di cui il sostegno sia in C, ma Q la potenza, e B il peso la cui forza tangenziale sapiamo essere $\frac{B \cdot CN}{CB}$. Parte di questa forza si impiega nel produrre il moto al corpo B, e sia questa $= x$, la rimanente che opera nel vette sarà $= \frac{B \cdot CN - x \cdot CB}{CB}$. Venga questa espressa dalla retta BE, e sia E7 normale a BE. Per la similitudine de' triangoli EB7, BCP, la forza BE moltiplicata nella distanza BC è eguale alla forza B7 moltiplicata nella distanza PC; adunq. in luogo del vette CQB con la forza BE annessa al punto B, si può assumere il vette CQP con la forza B7 annessa al punto P. Ma perchè per le leggi mecaniche, è come CP, CQ, così la potenza Q, equivalente alla sollecitazione B7, alla med.a sollecitazione B7 applicata in P, la potenza Q sosterebbe una sollecitazione $= \frac{CP \cdot B7}{CQ}$; adunque al punto Q nella direzione QI si comunicherà la forza $= \frac{CP \cdot B7}{CQ}$. Ma per la similitudine de' triangoli BE7, CPB sarà $B7 = \frac{B \cdot CN - x \cdot CB}{CP}$, adunque la sollecitazione comunicata in Q è $= \frac{B \cdot CN - x \cdot CB}{CQ}$ ed aggiungendo la propria del peso Q, sarà la somma $= \frac{B \cdot CN - x \cdot CB + Q \cdot CS}{QC}$. Ma da questa si deve sottrare la resistenza del peso A, la quale rispetto al peso Q sappiamo essere $= \frac{A \cdot CV}{QC}$, onde la forza acceleratrice in Q sarà $= \frac{B \cdot CN - x \cdot CB + Q \cdot CS - A \cdot CV}{QC}$.

Questa si sostituisca in luogo di F nella formula Fd^{tt} [illegible] MdV, mdu come sopra in luogo di f si sostituisca x, in luogo di mdu B·BC; ma in luogo di MdV si devo sostituire $Q \cdot (Q + \frac{A \cdot CA^2}{CQ^2})$, perchè la forza d'inerzia del corpo A si [illegible]

$\frac{A\cdot AC}{qC}$, ed AC la sua velocità, o distanza ciò fatto, troveremo
$x = \frac{B^2\cdot CB\cdot CN + q\cdot B\cdot CB\cdot CS - A\cdot B\cdot CB\cdot CV}{B\cdot \overline{CB}^2 + q\cdot \overline{CO}^2 + A\cdot \overline{CA}^2}$, e ripetuto il medesimo discorso del primo caso intorno al pendolo semplice CG, sarà finalmente $CG = \frac{B\cdot\overline{CB}^2 + q\cdot\overline{Cq}^2 + A\cdot\overline{CA}^2}{B\cdot CT + q\cdot Cy - A\cdot CZ}$; che è la stessa equazione.

Coroll.° 1.°

Quantunque questa espressione paja diversa dalle ritrovate dagli altri, ella è però in tutto la stessa. Imperciocchè sia L il comune centro di gravità de' corpi B, q, ed M di tutti tre B, q, A; poichè condotta per i punti M, L la retta AML 2 terminata dalla B3 prodotta in 2, i triangoli qL3, LB2 sono simili, sarà BL, LQ :: 2L, L3; ma se L si suppone il centro di gravità de' due corpi B, q, adunque BL, LQ :: q, B, e però 2L, L3 :: q, B, ed in conseguenza il punto L sarebbe il centro di gravità de' due pesi anco collocati in 3, e 2, e però se M è il centro di gravità, come supponiamo, de' tre pesi B, q, A, lo sarà ancora se il peso B fosse in 2, e q in 3. Ora, perchè sono simili pure i triangoli MT2, My3, MzA, anco posto il peso A in Z, il peso B in T, il peso q in y, sarà M il loro comune centro di gravità, e però (Teor.^a 2.° di statica) sarà $B\cdot CT + q\cdot Cy - A\cdot CZ = \overline{A+B+q}\times MC$; onde la equazione si muterà in questa

$$CG = \frac{B\cdot\overline{CB}^2 + q\cdot\overline{Cq}^2 + A\cdot\overline{CA}^2}{\overline{A+B+q}\times CM}$$

la quale è la stessa di quella dell'Ugenio, Bernoulli, Ermanno &

Coroll.° 2.°

Se i corpi fossero in maggior numero lo stesso discorso

darebbe

sarebbe la soluzione, ma con un calcolo molto più laborioso. E se i corpi fossero tutti eguali, supposto ognuno di essi $= q$, ed il loro numero $= n$, la formula sarebbe in questo caso $CG = \frac{(\overline{CB}^2 + \overline{Cq}^2 + \overline{CA}^2)\, q}{n \cdot CM}$.

Corollº 3º Figª 6ª

Se i pesi non fossero tutti nello stesso piano KGPAq, ma qualch'un di loro, come per esempio q, fosse fuori, egli è manifesto, che condotta dal centro del peso q una perpendicolare ad esso piano, l'azione della gravità del peso q contro il pendolo sarà la stessa, come se q fosse in questo stesso punto del piano. Dunque il peso q moltiplicato nel quadrato della distanza di questo punto dal centro del moto con di più gl'altri pesi moltiplicati ne' quadrati delle loro distanze, ed il tutto diviso per la somma de' pesi nella distanza del comun centro di gravità, come vuole la nostra formula generale, ci darà il centro d'oscillazione.

Corollº 4º

Ma in due maniere può oscillare un pendolo composto cioè nella direzione, in cui sia il taglio del piano, il qual moto chiamano oscillare in latus, e come finora abbiamo considerato; l'altra maniera quando la direzione del moto incontri la faccia, ossia piano in cui sono i pesi, e che chiamano oscillare in planum. Però sia il pendolo composto (Figª 7ª) BqAC, ed oscilli in questo secondo moto, e sia nella verticale CG il comun centro di gravità de' pesi. Poiché possiamo considerare il punto A come [illegible] in M, B in N, q in R, supposte AM, BN, qR normali a CG, sarà CG (supposto G il centro d'oscillazione) sarà dico $CG = \frac{A \cdot \overline{CM}^2 + B \cdot \overline{CN}^2 + q \cdot \overline{CR}^2}{A \cdot CM + B \cdot CN + q \cdot CR}$,

cioè

cioè, pel teor.a del centro di gravità sarà $CG = \frac{A\cdot\overline{CM}^2 + B\cdot\overline{CN}^2 + Q\cdot\overline{CR}^2}{\overline{A+B+Q}\times CL}$

Scolio. Fig.a 8.a

Sembrerà forse, che da noi si sia ommesso la soluzione del terzo caso, in cui la respettiva azione de' pesi B, Q può essere nulla; ma questo caso ancora senza avvedersene l'abbiamo sciolto nel secondo. E difatti sia (Fig.a 7.a) CQBK un circolo, nella di cui periferia stiano i centri di gravità de' due pesi Q, B del pendolo composto CQB. Si descriva pel punto C l'altro circolo CDP col diametro CP maggiore di CK per un'infinitesimo. Si muova il pendolo, ed il punto B pervenga in D descrivendo l'arco BD infinitesimo: dico, che il corpo Q arriverà in F fuori della periferia del med.o circolo CD. Imperocchè si prolunghi CB in E, e CQ in H, e da E, B si congiungano le corde EP, BK; lo stesso si faccia da' punti Q, H. Sarà dunq. CB, CH :: BE, KP, e così pure CK, CQ :: KP, QH. dunque ex æquo CB, CQ :: BE, QH; ma BD, QF :: CB, CQ, dunque BE, QH :: BD, QF; e condotte le rette ED, HF, per essere i due angoli EBD, HQF retti, saranno simili i triangoli EBD, HQF, e l'angolo BED uguale all'angolo QHF. Ma se il punto F cadesse nella periferia del circolo CHP, allora l'angolo QHF come insistente sopra arco minore sarebbe minore dell'angolo BED. dunque essendo gli angoli eguali, il punto F cade fuori del circolo. Adunq. il peso B pervenuto in D agirà nel peso Q giunto in F, e diam.te per un tempo infinitesimo l'azione dell'uno nell'altro sarà nulla. Fra ciò posto si aggiunga il terzo peso A (Fig.a 5.a) sul M quel punto, in cui essendo il peso Q, egli è in equilibrio col peso B, ossia senza alcuna azione, come stando il braccio CA. Dunq. bisognerà

bisognerà che, considerando CB come pendolo separato dal pen-
dolo ACM, i corpi B, M scorrano nel primo istante del moto
spazj minimi proporzionali alle distanze CB, CM, ed in
conseguenza acquistino le prime inassegnabili velocità nella
stessa ragione. Ma ciò si verifica anco dei due pendoli CB, Cq
considerati come semplici, dunque i due pendoli ACM, Cq ac-
quisteranno nel primo istante le prime inassegnabili veloci-
tà nella ragione delle distanze CM, Cq. E perchè l'inclina-
zione di essi due pendoli all'orizzonte è la stessa, sarà co-
stante la proporzione delle sollecitazioni tangenziali; dun-
que nella ragione, che sono le prime inassegnabili velo-
cità, saranno ancora gl'incrementi successivi, e però se
il pendolo Cq dopo il primo minimo tempo è più presto
del pendolo CB, lo sarà ancora il pendolo ACM, sicchè
dopo il primo istante del moto il peso B sarà nel [illegible] M,
[illegible] a dimostrarsi.

Problema 8° Fig.a 9.a

[illegible] in plano una figura qualunque, la quale sia in
due parti eguali simili, e similmente poste divisa dalla retta che
dal centro di sospensione passa pel centro di gravità di essa,
si dimanda il centro di oscillazione.

Sia [illegible] CA la data figura, C il centro del moto, CB = x, BO
= dx, BR = y, e sia z la lunghezza cercata del pendolo sem-
plice. Se il pendolo CB avesse annesso il solo rettangolo
MC, perchè esso potiamo considerarlo come tutto unito
[illegible] nel punto B, secondo la nuova formula del
[illegible] n° dell'antecedente problema, avremo $z = \frac{2yxxdx}{2fydx}$
intendendo, che la lettera f esprima la distanza del centro
di gravità del rettangolo CM dal punto C centro del moto

avremo

dunq. integrando $z = \frac{\int yxxdx}{\int ydx}$ che sarà la formula per tutta la figura CSM in miora la seguente la distanza del centro di gravità di tutta la figura, e però si assume come costante. Ma pel coroll.º 4.º Cap.º 2.º di statica $f = \frac{\int yxdx}{\int ydx}$; dunq. l'equazione cercata sarà $z = \frac{\int yxxdx}{\int yxdx}$, in cui in luogo della y si dovrà sostituire il suo valore dato col mezzo della equazione della curva che termina la data figura.

Coroll.º 1.º

Che la figura sia sospesa non nel punto C, ma nel punto R della retta BC prodotta, che supponiamo rigida e senza gravità, chiamato $RC = e$, e fatto il dovuto, come sopra avremo la formula seguente $z = \frac{\int ydx \times \overline{x+e}^2}{\int ydx \times \overline{x+e}}$

Esempio primo

Sia y costante $= FA = a$ onde la data figura sia un rettangolo, e sia $CH = b$; dunq. la formula sarà $z = \frac{\int axxdx}{\int axdx}$, cioè $z = \frac{2}{3}x$, e posta $x = b$, $z = \frac{2}{3}b = \frac{2}{3}CH$.

Esempio 2.º

Sia FAC un triangolo isoscele, che oscilli attorno al punto C; sarà dunque $y = \frac{ax}{b}$, e la formula $z = \frac{\int ax^3dx}{\int axxdx}$, cioè $z = \frac{3}{4}x$; e posta $x = b$, $z = \frac{3}{4}b$

Esempio 3.º

Oscilli il medesimo triangolo attorno al punto R, sarà dunq. $z = \frac{\int axdx \times \overline{e+x}^2}{\int axdx \times \overline{e+x}}$; cioè integrando $z = \frac{6ex + 3xx + bee}{6e + 4x}$, e posta $x = b$, $z = \frac{8eb + 3bb + b.e}{6e + 4b}$,

Esempio 4.º

Sia il medesimo triangolo sospeso per la base FA ed oscilli attorno ad essa, e si denomini ora $AB = x$: dunq. sarà $y = a - \frac{ax}{b}$, e quindi la formula $z = \frac{\int abxxdx - ax^3dx}{\int abxdx - axxdx}$, cioè $z = \frac{4bx - 3xx}{6b - 4x}$, e posta $x = b$, $z = \frac{1}{2}b$.

Esempio

Esempio 5°.

Sia la curva FAC una delle parabole ..., la cui generale equazione $a^n x^m = y^{n+m}$, avremo $y = a^{\frac{n}{n+m}} x^{\frac{m}{n+m}}$, e però la formula $z = \frac{\int x^{\frac{m}{n+m}+2} dx}{\int x^{\frac{m}{n+m}+1} dx}$, ed integrando $z = \frac{3m+2n}{4m+3n}$

Se sarà $m = 1$, $n = 1$, cioè la parabola apolloniana avremo $z = \frac{5}{7} x$. Se $m = 1$, $n = 2$ parabola cubica, avremo $z = \frac{7}{10} x$; se sarà $m = 1$, $n = 3$ parabola del quarto grado, avremo $z = \frac{9}{13} x$

Esempio 6°.

Sia il settore ABH. Fatta la osservazione, come nello esempio 4°. del centro di gravità, e denominato come nel citato luogo, sarà il rettangolo IH il resto, che corrisponde alla distanza AL $= x$; ma esso rettangolo è $= \frac{sdsdt}{a}$, ed $x = \frac{cs}{a}$; adunque nella formula generale sostituito $\frac{sdsdt}{a}$ in luogo di ydx, e $\frac{cs}{a}$ in luogo di x, sarà il numeratore $\frac{ccs^3 dsdt}{a^3}$, ed integrato dt costante, $\frac{ccs^4 dt}{4a^3}$, e fatta $s = a$, $\frac{ccadt}{4}$ rispetto al settore ABC; ed di nuovo integrando $\frac{ccat}{4}$ numeratore rispetto a tutto il settore ABH. Quanto al denominatore, sarà qui $\frac{cssdsdt}{aa}$, ed integrando, supposta dt costante $\frac{cs^3dt}{3aa}$, e fatta $s = a$, $\frac{cadt}{3}$ rispetto al settore ABC, e di nuovo integrando $\frac{cat}{3}$, rispetto a tutto il settore ABH, e però sarà $z = \frac{3}{4} c$ ... per le ... dell'anello IF. ... come pel mede.to citato luogo, è $cdt = adb$, cioè $c = \frac{ab}{t}$, sarà pure $z = \frac{3ab}{4t}$.

... in ... potrebbero ridursi: ma poichè essi non ... alcuna difficoltà ... a questo ... le integrazioni ... delle quali a noi ... il trattare, così basteranno ... regola generale.

Problema 8°.

... figura, si dimanda il centro d'oscillazione d'essa.

(ia, fig. 9.) BI = u, IS = du, il rimanente come sopra. sarà dunq. il picciolo rettangolo PI (dx du) il peso della distanza IC, la quale è = √(xx+uu), e però la somma del prodotto di essi presi tutti nel quadrato delle distanze rispettive sarà essa = ∫ xx + uu − 2x du, che riversone rispetto al rettangolo RB, la x e dx costanti, si trova essere $uxxdx + \frac{1}{3}u^3dx$, e posta y in luogo di u, sarà $yxxdx + \frac{1}{3}y^3dx$ rispetto all'elemento EB. Adunque l'integrale moltiplicato per due, cioè $2\int yxxdx + \frac{1}{3}y^3dx$ corrisponderà a tutta la figura, e però secondo la nostra formula avremo $z = \frac{\int yxxdx + \frac{1}{3}y^3dx}{f\int ydx}$; ma $f = \frac{\int yxdx}{\int ydx}$; dunq. $z = \frac{\int yxxdx + \frac{1}{3}y^3dx}{\int yxdx}$.

Esempio p.°

Sia ZAC un rettangolo sospeso pel mezzo d'uno de' lati, sarà y = a; dunq. $z = \frac{\int axxdx + \frac{1}{3}a^3dx}{\int axdx}$, cioè $z = \frac{2}{3}x + \frac{2aa}{3x}$, e posta x = b, sarà $z = \frac{2}{3}b + \frac{2aa}{3b}$

Esempio 2.°

Sia ZCA un triangolo sospeso pel punto C, sarà $y = \frac{ax}{b}$ dunq. $z = \frac{\int abb\,x^3dx + \frac{1}{3}x^3x^3dx}{bb\int axxdx}$, cioè $z = \frac{3}{4}x + \frac{aax}{4bb}$; e posta x = b, sarà $z = \frac{3}{4}b + \frac{aa}{4bb}$.

Esempio 3.°

Sia il med.° triangolo sospeso dal punto di mezzo della base FA; chiamato ora HB = x, sarà $y = \frac{ab - ax}{b}$, e sostituito questo valore nella formula, avremo

$$z = \frac{\int ab^3xxdx - abb\,x^3dx + \frac{1}{3}a^3b^3dx - a^3bbxdx + a^3bxxdx - \frac{1}{3}a^3x^3dx}{\int ab^3xdx - abbxxdx}$$

cioè

$$z = \frac{4b^3xx - 3bbx^3 + 4aab^3 - 6aabbx + 4aabxx - aax^3}{6bx^3 - 4bbxx}$$

e posta x = b, sarà $z = \frac{1}{2}b + \frac{aa}{2b}$.

Esempio 4.°

Esempio 4.°

Sia la curva ZC A una parabola appolloniana sospesa nel punto, sarà $y=\sqrt{\frac{aax}{b}}$, e però $z=\frac{\int xxdx\sqrt{\frac{aax}{b}}+\frac{1}{3}\frac{aadx}{b}}{\int xdx\sqrt{\frac{aax}{b}}}$ cioè $z=\frac{5}{7}x+\frac{aa}{3b}$, e posta $x=b$, $z=\frac{5}{7}b+\frac{aa}{3b}$.

Esempio 5.° fig.ª 10.ª

Sia il settore ABCK sospeso nel punto A. Denominato come nell'esempio 4.° del centro di gravità, il vettangolo $IH=\frac{sds\,dt}{a}$, e il peso, che corrisponde alla distanza AI $=s$. Sarà il prodotto di esso peso nel quadrato della distanza, cioè $s^3\frac{dsdt}{a}$, ed integrato, supposta dt costante $s^4\frac{dt}{4a}$, e fatta $s=a$, $\frac{a^3dt}{4}$, sarà il numeratore della frazione rispetto al settore ABC, e di nuovo integrando, presa dt variabile, $\frac{a^3b}{4}$ il numeratore rispetto al settore ABK. Il med.° peso moltiplicato nella distanza $AL=\frac{cs}{a}$ cioè $\frac{css\,dsdt}{aa}$, ed integrando, supposto dt costante, $\frac{cs^3dt}{3aa}$ e fatta $s=a$, $\frac{cadt}{3}$, sarà il denominatore rispetto al settore ABC, e di nuovo integrando, presa dt variabile, $\frac{cat}{3}$ il denominatore rispetto a tutto il settore ABK. Dunque $z=\frac{3aa}{ac}$.

Similmente si proceda servendosi dell'annesso IF. Ora poiché $c=\frac{ab}{t}$, sarà pure $z=\frac{3at}{4b}$

Problema 7.° fig.ª 11.ª

Raggiri attorno all'asse CH la curva ZC, e formi un solido, il quale oscilli sospeso nel punto C; si dimanda la formula generale del centro di oscillazione d'esso solido.

Sia ACCZq il dato solido, a cui si sega il circolo ACZ e i diametri normalm.te posti ZA, CZ, onde il solido [illegible] ZA. Sia CA $=x$, HA $=y$, [illegible] [illegible] [illegible] AL, [illegible] [illegible] sia

sia $HL = t$, $LG = HI = u$. Poiche sappiamo, [illegible] Proble-
ma 6.°, che la somma dei prodotto de' pesi della linea GL
nel quadrato delle respettive distanze dal punto di sospensi:
one C è $= xxu + \frac{1}{3}u^3$, la somma dei prodotto di tutti i
pesi del rettangolo GI nel quadrato delle respettive distanze
sarà $xxudt + \frac{1}{3}u^3dt$. Ora si faccia $udt = dp$, $u^3t = q$, e
differenziando $dq = u^3dt + 3uutdu$; ma per il circolo è
$yy = uu + tt$ e così pure $yyudt = u^3dt + ttudt$; e perche
nel nostro caso la ordinata y fa figura di costante, sarà
$udu = -tdt$, onde sostituendo, sarà $yyudt = u^3dt - uu$
$tdu = yydp$: ed ancora $3u^3dt - 3uutdu = 3yydp$. Si
aggiunga [illegible] equazione coll' equazione di sopra
$u^3dt + 3uutdu = dq$, ed avremo $u^3dt = \frac{3}{4}yydp + \frac{1}{4}dq$.
Questo valore lo sostituiremo nella espressione
$xxudt + \frac{1}{3}u^3dt$, ed in oltre si ponga dp in luogo di udt,
sarà $xxdp + \frac{1}{4}yydp + \frac{1}{12}dq$, il di cui integrale è l'
integrale del prodotto di tutti i pesi del segmento circo:
lare HBGL nel quadrato delle respettive distanze.
Ora poiche rispetto a esso segmento circolare le CH,
HA, cioè x, y fanno figura di costanti, l'integrale
sarà $xxp + \frac{1}{4}yyp + \frac{1}{12}q$. Ma devesi osservare, [illegible]
[illegible] il segmento AHLG $= p$ [illegible] tutto il
quadrante del circolo, allora il rettangolo HIGL di=
viene nullo: adunque l'integrale rispetto a tutto il
quadrante, sarà $(xx + \frac{1}{4}yy) HAC$; [illegible]
[illegible] il circolo, sarà $(xx + \frac{1}{4}yy) \frac{cyy}{2r}$
[illegible]

$$\frac{\int (xx + \frac{1}{4}yy) yydx}{Syyxdx} = z$$

Esempio p.°

Esempio 1°.

Sia il dato solido un cilindro, e sia $HA = b = y$; adunque sarà $z = \frac{4xx + 3bb}{6x} = \frac{2}{3}x + \frac{bb}{2x}$

Esempio 2°.

Sia il dato solido un cono, e sia $HA = b$, $CH = a$, sarà $y = \frac{bx}{a}$ e però $z = \frac{4aax + bbx}{5aa} = \frac{4}{5}x + \frac{bbx}{5aa}$

Esempio 3°.

Sia il dato solido un conoide parabolico, sarà dunque $y = \sqrt{\frac{bbx}{a}}$, e però $z = \frac{3ax + bb}{4a} = \frac{3}{4}x + \frac{bb}{4a}$.

Esempio 4°.

Sia il dato solido una sfera, adunque $y = \sqrt{aa - xx}$, e però $z = \frac{15aax + 20aa - 18xx}{40a - 30x}$, e posta $x = a$, $z = \frac{7}{10}a$.

Esempio 5°.

Sia il dato solido un'emisfero sospeso nel centro, adunque $y = \sqrt{aa - xx}$, e però $z = \frac{15a^4 - 9x^4 + 10aaxx}{30aax - 15x^3}$, e posta $x = a$ $z = \frac{16}{15}a$.

Corollario

Facillissima è la maniera di ritrovare il centro d'oscillazione delle linee, oscillino esse in piano, ovvero in lato, imperocchè [illegible] in questo caso non à [illegible], ma [illegible] solamente [illegible] chiamato $= ds$ l'elemento d'esse linee, sarà $z = \frac{\int xxds}{\int xds}$ formola per quelle, che oscillano in piano, e così pure $z = \frac{\int xx + yy \cdot ds}{\int xdx}$ per quelle, che oscillano in [illegible] [illegible] nulla rimane, [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] dall'equazione della linea, [illegible] la [illegible] che non potrà [illegible] [illegible] metodo, ma alle integrazioni, o riduzioni alle quadrature, che dovevano [illegible].

Teorema. Fig. 14.

[illegible]

Sia il pendolo composto CPQ cogli annessi pesi P, Q [illegible] alle verghe rigide, e senza peso considerabile [illegible]

e si

e si muova nel piano PQ attorno al punto C, e, cavi [illegible] retta A nel centro comune di gravità de' due [illegible]; il centro di [illegible] sirà in quel punto, [illegible] nella linea CA [illegible], che movendosi il pendolo la percossa nella verga PQ contro il punto H considerato come un ostacolo, sia la massima, cioè i momenti de' corpi P, Q sieno eguali rispetto al punto H. Dico adunque che questo punto sta lontano dal punto C, quanto il centro d'oscillazione. Sieno alle CP, CQ perpendicolari le PB, QE, le quali incontrino l'asse CA ne' punti B, E, a cui sieno perpendicolari AO, [illegible]. Movendosi lungo il pendolo, le velocità de' corpi P, Q, saranno proporzionali alle distanze PC, QC, alle quali si facciano eguali le AB, EC. Poiche per la [illegible] al corollo 2°. Problema 2°. [illegible] l'impressione, che l'asse CA riceve da' pesi P, Q mossi colle velocità PC, QC nelle direzioni PA, QE, è la [illegible] s'essi fossero colle suddette velocità, e direzioni [illegible] le rette BO, EF parallele ad AC, dovrà essere $P \times AO \times AH = Q \times EF \times [illegible]$

[illegible] AB, EC ne' punti O, F, condotte

$P \times AO \times AC - P \times AO \times HC = Q \times EF \times CH - Q \times EF \times EC$, [illegible]

[illegible] sarà $P \times AO \times AC + Q \times EF \times EC = Q \times EF \times HC + P \times AO \times HC$. [illegible] ciò posto sieno PG, QH perpendicolari ad AC, essendo simili ed eguali i triangoli ABO, CPG; e EFC, CHQ, perche $CP = AB$ [illegible] $C = CQ$, sarà $AO = CG$, e $EF = CH$, onde sostituendo sarà $P \times GC \times AC + Q \times HC \times EC = \overline{Q \times HC + P \times GC} \times HC$; ma per la similitudine de' triangoli ACP, PCG, e [illegible] $\overline{CA} \times CG = \overline{CP}^2$, e [illegible] $\times CH = \overline{CQ}^2$; ma [illegible] ora $Q \times [illegible] + P \times CG = M \times MC$ supposto che il punto M sia il centro di gravità de' corpi, cioè M sia $= P + Q$ [illegible]

$P \times \overline{CP}^2 + q \times \overline{Cq}^2 = M \times MC \times CX$, e finalmente $CX = \frac{P \times \overline{CP}^2 + q \times \overline{Cq}^2}{M \times MC}$

che è la medesima formula del centro d'oscillazione.

19 A-

145

14

[illegible]

n.o.l

Annotazione allo scolio
Esaminate quanto basta ecc.

S'io mal non m'appongo V. S. Ill.ma move in una petizione manifesta di principio, mentre procura di dimostrare, che tutte l'altre leggi delle discese dei gravi, trattane quella del Galileo sieno impossibili. Lo sbaglio consiste in ciò, ch'ella si serve delle due formule convenienti all'ipotesi galileana combinandole con altre supposizioni dinotanti la relazione dello spazio alla velocità, ch'ella prende di mostrare assurde. Ella è cosa chiara, che così nascerà l'assurdo, non perchè le leggi sieno sempre in se stesse ripugnanti, ma perchè tali le fa apparire, ponendole nello stesso tempo, e distruggendole.

Per meglio spiegarmi io noto, che ad ogni supposizione corrispondono sempre due formole, una principale, e l'altra di conseguenza; e quest'ultima trae l'origine da una terza formula generale che in qualunque caso dee necessariam.te verificarsi la quale si è $\frac{ds}{dt} = u$. A cagione d'esempio supponiamo che i quadrati delle velocità acquistate siano come gli spazj crescenti, onde abbiasi $\frac{f ds}{m} = u du$, e sostituendo in cambio di ds, il valore $u dt$ della formula generale si à $\frac{f dt}{m} = du$

Mutiamo ora ipotesi, e fingiamo, che i quadrati quadrati delle velocità acquistate sieno come gli spazj cioè $\frac{f ds}{m} = u^3 du$, e ripetuta la superiore sostituzione avremo $\frac{f dt}{m} = u^2 du$.

Ella certamente vede, che qui non c'entra nè punto, nè poco o l'una, o l'altra delle formule Galileane $\frac{f ds}{m} = u du$, $\frac{f dt}{m} = du$, e s'io voglio com'ella à fatto a viva forza introdurle unisco assieme due ipotesi differenti, e contrarie onde necessariam.te ~~esce~~ sorta fuori quell'assurdo che è giustam.te osservato [illegible].

Trattando la cosa generalm.te pongasi $\frac{f ds}{m} = u^n du$, e con seguenza $\frac{f dt}{m} = u^{n-1} du$ delle quali due formule [illegible]

caverò le seguenti illazioni. 1.° se giusta [illegible] del Galileo faccio $n=0$, segue essere $\frac{f\,dt}{m} = \frac{du}{u}$, ed integrando essendo f costante, ~~$\frac{ft}{m}$ [illegible] nel principio del moto (a velocità uguale a nulla) cioè il logaritmo del nulla $= \infty$;~~ dunque ~~si richiederebbe un tempo infinito per iscorrere qualsivoglia minima spazio.~~ $t = l\,u$ [illegible] della sottotangente $\frac{m}{f}$

* Secondo. Nasce l'inconveniente posto n qualsiasi numero negativo, imperciocchè integrata la formula generale del tempo $\frac{f\,dt}{m} = u^{n-1} \times du$. sia $\frac{ft}{m} = \frac{u^n}{n}$, ed essendo n negativo $\frac{ft}{m} = \frac{1}{-nu^n} = \frac{u^{-n}}{-n}$. quindi nel principio del moto, essendo la velocità, ed ogni sua podestà nulla trovasi $\frac{ft}{m} = \frac{1}{0} = \infty$.

Terzo. Ma quando si assuma l'esponente n eguale ad una quantità positiva la espressione $\frac{ft}{m} = \frac{u^n}{n}$ non comparisce repugnante; attesochè alla velocità nulla risponde il tempo nullo.

Ella sa che il Leibnizio s'è dato a credere che i due canoni Galileani, che trovan luogo nella presente costituzione di cose, siano leggi piuttosto di semplicità, e convenienza, che di precisa geometrica necessità. Laonde in qualche altro sistema non repugnerebbe secondo lui, che in altra maniera si misurassero le forze vive dei corpi in moto a cagion d'esempio per la massa moltiplicata nel cubo, o nel quadrato-quadrato della attuale velocità. Ora, i fautori d'essi non possono convincersi di repugnanza in virtù delle osservazioni sin ora fatte. Egli è ben vero, che il Sig.r Leibnizio s'inganna, e che le suddette leggi sono impossibili: ma per dimostrar ciò fa di mestieri battere un'altra strada. Il Sig.r mio Pr.e in alcune sue dissertazioni della comunicazione dei moti à lungam.te versato su questo punto, ch'è uno dei più importanti della Fisica

* Tuttavia se a $u=0$ corrisponde $t=0$, è necessario rendere il nullo contemporaneo, onde essendo $u=0$, sia parimente nulla la logistica della sottotangente $\frac{m}{f}$, $t = l\,u = 0$. Pongasi ora [illegible] piccola [illegible] dalla natura della Logistica [illegible] che l'assissa intercetta tra le ordinate $u=0$, [illegible] [illegible]

Annotazione
Seconda

Coroll.° 3.° Quindi come la scala etc. e quando si muova il corpo etc. pag. 27.

Notisi, che si ~~verifich~~ verifica l'isocronismo non solam.te quando le forze sollecitanti sono al triangolo, ma di più q.do le loro scale sono due curve simili. Vegga i lemmi del Sig.r mio P.re inseriti nella sua dissertaz.e ne' intorno le forze elastiche stampata negli Atti della Accademia di Bologna.

Annotazione
Terza

Agli esempj dopo il Probl.a 3.° si trova l'equazione differenziale
necessarj [illegible] della curva [illegible] dal progetto in qualunque [illegible]
si vede ommesso l'esemp.o della più semplice Epicicloide, di sotto circ.;
q.do cioè un circolo gira intorno ad un altro eguale, p.r parallel. [illegible]
qual curva le forze centrali riferite al principio della pag. 95. e
rotazione sono in ragione reciproca quadruplicata seguenti
delle distanze dal loro foro. Questa avvertenza è stata fatta dal Sig.r mio Padre, nel Tomo ij. dei Giornali d'Italia alla pag. 217, 218, 219.

Annotazione
Quarta

pag. 104

Pare, che nella teoria dei getti delle bombe, gli Autori che ne ànno tr.ttato a lungo, abbiano omesse alcune cose necessarie al compim.to d'essa. Il Sig.r Dr. Suzzi à scoperto il seguente teorema. Tutti i fochi de Parabole infinite descritte dai progetti spinti dalla medesima forza sotto diversi angoli d'inclinazione, sono in una circonferenza di cerchio. Oltre a ciò nulla è stato detto la forza dei colpi delle bombe stesse descriventi varie parabole.

Annotazione
alla pag.na 572

Si è di sopra alla pag.na 57 trovato $t = l\,f+u - \frac{1}{2}l\,f-u$ nella logaritmica della sottangente 1, e posto il protonumero $= f$. Ora questa formola si muta nella seguente $t = l\frac{\sqrt{f+u}}{\sqrt{f-u}} + b$, e fatta la riflessione, che quando $t=0$, $u=a$, si determina $b = -l\frac{\sqrt{f+a}}{\sqrt{f-a}}$, onde ne risulta $t = l\frac{\sqrt{f+u}}{\sqrt{f-u}} - l\frac{\sqrt{f+a}}{\sqrt{f-a}}$.

Quantunque la formola contenga verità, stimo bene il dilucidare questo computo di logaritmi. $\frac{1}{2}l\,f+u$ è il logaritmo di una media proporzionale $\sqrt{f^2+fu}$ fra il protonumero f, ed il numero $f+u$. Non altrimenti $\frac{1}{2}l\,f-u = l\sqrt{f^2-fu}$. Avremo pertanto $t = l\sqrt{f^2+fu} - l\sqrt{f^2-fu} + b$. Per trovare la differenza fra i due logaritmi, facciasi $\sqrt{f^2-fu} : \sqrt{f^2+fu} :: f : f\frac{\sqrt{f^2+fu}}{\sqrt{f^2-fu}}$, e sarà $l\sqrt{f^2+fu} - l\sqrt{f^2-fu} = l\,f\frac{\sqrt{f^2+fu}}{\sqrt{f^2-fu}} = l\,f\frac{\sqrt{f+u}}{\sqrt{f-u}}$, e perciò $t = l\,f\frac{\sqrt{f+u}}{\sqrt{f-u}} + b$. Ma quando $t=0$, $u=a$; dunque $t = l\,f\frac{\sqrt{f+u}}{\sqrt{f-u}} - l\,f\frac{\sqrt{f+a}}{\sqrt{f-a}}$. Si rifletta essere $l\,f\frac{\sqrt{f+u}}{\sqrt{f-u}} = l\frac{\sqrt{f+u}}{\sqrt{f-u}} + l\,f$. In fatti si ha la quantità, il cui logaritmo si uguaglia all'aggregato dei due ultimi logaritmi facendo $1 : f :: \frac{\sqrt{f+u}}{\sqrt{f-u}} : f\frac{\sqrt{f+u}}{\sqrt{f-u}}$. Similmente $l\,f\frac{\sqrt{f+a}}{\sqrt{f-a}} = l\frac{\sqrt{f+a}}{\sqrt{f-a}} + l\,f$, e quindi $t = l\,f\frac{\sqrt{f+u}}{\sqrt{f-u}} - l\,f\frac{\sqrt{f+a}}{\sqrt{f-a}} = l\frac{\sqrt{f+u}}{\sqrt{f-u}} + l\,f - l\frac{\sqrt{f+a}}{\sqrt{f-a}} - l\,f = l\frac{\sqrt{f+u}}{\sqrt{f-u}} - l\frac{\sqrt{f+a}}{\sqrt{f-a}}$ come ha trovato l'Autore, il cui calcolo è giusto, perchè coll'aggiunta della costante si compensano le parti, e avrà la conseguenza, che se si rinunziasse alla circostanza, che non si aggiungesse costante, ... del P. Rampinelli si ... all'...

Sia

Sia la velocità iniziale $u=0$: in questa sup
posizione avendosi nel principio del moto
$t=\frac{1}{2}l1-\frac{1}{2}l1=0$, non ci va aggiunta costante.
Sarà dunque $t=\frac{1}{2}l(1+u)-\frac{1}{2}l(1-u)$. Si trasforma
questa formola nella seguente $t=l\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}}$, e
nel primo istante del movimento si troverà
$t=l1$, che nella ipotesi del protonumero
non è $=0$. Richiamata a dovere la formola,
scopriremo $t=l1\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}}$, in cui posta $u=0$,
si ha $t=l1=0$.

Si computeranno rettamente i logaritmi, usando la seguente regola, del pari semplice
[illegible] a certa [illegible] ridurre [illegible] in un solo
si [illegible] il calcolo come se [illegible]
protonumero, ed indi si moltiplichi il numero [illegible]
il logaritmo trovato per il protonumero [illegible] quoziente [illegible]
ed il logaritmo di cui [illegible] prodotto, sarà quel [illegible]
[illegible] formola t [illegible] $-\frac{1}{2}l(1-u)$
[illegible] si cerca [illegible] come protonumero.
[illegible] $t=l\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}}$; dunque [illegible]

[illegible], si avrà, posto [illegible]
[illegible] stessa
protonumero [illegible] $l\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}}$
questa equazione $t=\frac{1}{2}l(1+u)$ [illegible] $\frac{1}{2}l(1-u)$ [illegible]
$-\frac{1}{2}l(1-u)$ si ridurrà [illegible] $l\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}}$ o
[illegible]
ovvero t [illegible] $\frac{\sqrt{1+u}\sqrt{1-u}}{\sqrt{1-u}\sqrt{1-u}}$ [illegible]
$\frac{1}{2}l(1-u)$ ne risulterebbe $t=$ [illegible]
[illegible] con la [illegible]
[illegible]
[illegible] perchè la dimensione è una
[illegible]

punto B, la velocità è data, cioè q[ue]lla, che avrebbe acquistata ca:dendo da A in B, cioè $= \sqrt{2af}$; dunq. cancellato il termine $-2fz$, per essere $= 0$, rimane $bb = -uu$, cioè $bb = -2af$, e però l'equazione compiuta si trova essere $-2fz = uu - 2af$ luogo alla Parabola apolloniana ADI col parametro $= 2f$, le di cui ordinate CD rappresenteranno le velocità de' respettivi punti C, ed il grave giugnerà sino nel punto A, e nulla più. Ma la stessa parabola è anco la scala delle velocità nel moto na:turale de' gravi all'ingiù; dunq. da ciò chiaram.te si vede, che se un grave, dopo essere caduto per un dato spazio, si move:rà all'insù colla velocità ultimam.te acquistata, egli des:criverà di moto ritardato il medesimo spazio descritto ca:dendo nè più nè meno, e ne' medesimi punti avrà la medesima velocità.

Rispetto ai tempi presa la formula (Teor. 3.°) $dt = \frac{dz}{u}$, e sos:tituito il valore di u quì sopra ritrovato, sarà $dt = \frac{dz}{\sqrt{2af-2fz}}$, ed integrando, $t = -\sqrt{\frac{2af-2fz}{f}} + b$; ma q[uan]do $t = 0$ nel principio del moto, allora $z = 0$ e però $b = \sqrt{\frac{2af}{f}}$, onde l'integrale compito sarà $t = -\sqrt{\frac{2af-2fz}{f}} + \sqrt{\frac{2af}{f}}$ equazione alla para:bola apolloniana. Pertanto descritta col parametro $= \frac{2}{f}$, Fig.a 8.a all'asse AB = a col vertice A la parabola ADI, e presa una qualunq. BC, o IH = z (fatta IM parallela ad AB) il tempo corrispondente allo spazio BC sarà HD ed allo spazio BA sarà MA. e perchè la parabola del medesimo parametro è ancora la scala de' tempi nella caduta, aper:tam.te si vede, che dal punto B al punto A giugnerà il gra:ve di moto ritardato in tempo eguale a quello del moto